Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 6
Abgabe 27.05.2011
Besprechung 01.06.2011

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 10: Schiebeoperatoren (8 Punkte)

Im Hilbertraum l^2 der Folgen $(a_1, a_2, \ldots)$ mit $a_i \in \mathbb{C}$ und $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 < \infty$ seien die Operatoren L und R definiert durch:

$$\begin{aligned} L: \quad & a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto La = (a_2, a_3, \ldots) \\ R: \quad & a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \mapsto Ra = (0, a_1, a_2, a_3, \ldots) \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt in l^2 ist

$$\langle a|b \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* b_k.$$

a) Zeigen Sie dass $R = L^\dagger$ und $L = R^\dagger$ ist, also

$$\langle a|Rb \rangle = \langle La|b \rangle \quad \text{und} \quad \langle a|Lb \rangle = \langle Ra|b \rangle$$

für alle $a, b \in l^2$ gilt. (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass $R^\dagger R = \mathbb{1}$ ist und $\|Ra\| = \|a\|$ für alle $a \in l^2$ erfüllt ist. Warum ist R trotzdem nicht unitär? (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren von R und $L = R^\dagger$. Beachten Sie dabei, dass $a \in l^2$ die Bedingung $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$ erfüllen muss. (4 Punkte)

Aufgabe 11: Teilchen im δ-Potential (12 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines Teilchens der Masse m in einem Potential $V(x) = -a\delta(x)$ mit $a > 0$ ist

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} - a\delta(x) \quad .$$

Die Eigenwert-Gleichung

$$H\psi(x) = E\psi(x) \tag{1}$$

bestimmt die möglichen Bindungsenergien E des Teilchens. Dabei muß ψ eine stetige, quadratintegrable und fast überall differenzierbare Funktion sein.

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung $\psi'(x)$ die Sprungbedingung

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \psi'(x) - \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \psi'(x) = \frac{2ma}{\hbar^2}\psi(0)$$

erfüllen muss, indem Sie (1) von $-\varepsilon$ bis ε (mit $\varepsilon > 0$) integrieren und dann ε gegen 0 gehen lassen. (2 Punkte)

b) Lösen Sie die Eigenwertgleichung (1) "stückweise". Definieren Sie dazu

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_- & \text{für } x < 0 \\ \psi_+ & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

und bestimmen Sie ψ_- und ψ_+ für beliebige $E \in \mathbb{R}$. Für welche Werte von E kann es quadratintegrable Lösungen für (1) geben? (2 Punkte)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) die möglichen Eigenwerte E. Wie viele Eigenwerte gibt es? (1 Punkt)

d) Geben Sie zu jedem Eigenwert E eine normierte Eigenfunktion ψ_E an. (2 Punkt)

e) Bestimmen Sie Erwartungswert und Unschärfe des Ortsoperators und des Impulsoperators für alle ψ_E. Hinweis: $\frac{d}{dx}\frac{x}{|x|} = 2\delta(x)$.

(4 Punkte)

f) Berechnen Sie für jeden Energieeigenwert E die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teilchen im Zustand $|\psi_E\rangle$ im Intervall $[-\frac{\hbar^2}{am}, +\frac{\hbar^2}{am}]$ anzutreffen. (1 Punkt)