**Quantenmechanik I SS 11**

Prof. U. Nierste
Dr. M. Wiebusch

**Übungsblatt 7**
**Abgabe 03.06.2011**
**Besprechung 08.06.2011**

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

## Aufgabe 12: Zeitentwicklung im Potentialtopf (5 Punkte)

a) Betrachten Sie den Potenzialtopf aus Aufgabe 9. Begründen Sie, warum man die Wellenfunktion

$$\psi(x, t=0) = \sqrt{\frac{105}{16a^7}}\, x(a-x)(a+x)$$

im Intervall $-a \leq x \leq a$ schreiben kann als

$$\psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(0)}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}. \tag{1}$$

Bestimmen Sie $c_n(0)$. (3 Punkte)

b) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung für die rechte Seite von (1), um $c_n(t)$ zu bestimmen. (2 Punkte)

## Aufgabe 13: Spinpräzession im Magnetfeld (15 Punkte)

a) Ein Teilchen mit Spin 1/2 und dem magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}$ befinde sich in einem zeitlich konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{B} = -\frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\omega}$. Die Kets $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ beschreiben Zustände des Teilchens mit Spin $+\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$ in $z$-Richtung. Der Hamiltonoperator in der Basis $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ ist also

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S}$$

mit $\mathbf{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\sigma}$, wobei $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ die Pauli-Matrizen aus Aufgabe 4 sind. Zeigen Sie, dass

$$H^2 = \frac{\hbar^2}{4}\omega^2\, \mathbb{1}$$

mit $\omega = |\boldsymbol{\omega}|$ ist. (2 Punkte)

b) Bringen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t,0) = \exp[-iHt/\hbar]$ in die Form

$$U(t,0) = a \cos\frac{\omega t}{2} - b \sin\frac{\omega t}{2} \quad .$$

und bestimmen Sie die $2 \times 2$-Matrizen $a$ und $b$. (2 Punkte)

c) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\psi(0)\rangle = |\uparrow\rangle$. $\mathcal{P}_{\uparrow\uparrow}(t)$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der $z$-Komponente des Spins zur Zeit $t$ das Ergebnis $+\hbar/2$ ('up') zu erhalten. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{P}_{\uparrow\uparrow}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega^2} \sin^2\frac{\omega t}{2} \quad .$$

(2 Punkte)

d) Wie verhält sich der Erwartungswert $\langle\psi(t)|\mathbf{S}|\psi(t)\rangle$ des Spinoperators $\mathbf{S}$ als Funktion der Zeit? Begründen Sie Ihre Aussage.

Hinweis: Verwenden Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabe 4e um zu zeigen, dass

$$e^{i\phi(\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma)/2} \sigma_i e^{-i\phi(\hat{\mathbf{n}}\cdot\sigma)/2} = [R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)]_{ij}\sigma_j$$

ist, wobei $R_{\hat{\mathbf{n}}}(\phi)$ eine $3 \times 3$-Matrix ist, die eine Drehung um den Winkel $\phi$ bezüglich der Achse $\hat{\mathbf{n}}$ beschreibt. (3 Punkte)

e) Berechnen Sie den Zeitentwicklungsoperator $U(t,0)$ für den Fall eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\Omega$ um die Achse $\hat{\mathbf{\Omega}}$ rotierenden Magnetfeldes:

$$\mathbf{B}(t) = R_{\hat{\mathbf{\Omega}}}(\Omega t)\mathbf{B}_0 \quad .$$

$\boldsymbol{\mu}$ und $H$ sind dabei wie in Teilaufgabe (a).

Hinweis: Hängt $H$ von $t$ ab, so ist $U(t,0)$ *nicht* gleich $\exp[-iHt/\hbar]$. Lösen Sie die zeitabhängige Schrödingergleichung mittels geeigneter Substitution. (6 Punkte)