KIT INSTITUT FÜR THEORETISCHE TEILCHENPHYSIK

Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 8
Abgabe 10.06.2011
Besprechung 15.06.2011

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Die Anmeldung zu den Vorleistungen für die Klausur ist jetzt freigeschaltet. Wenn Sie an der Klausur teilnehmen wollen melden Sie sich bitte bis zum 08.07.2011 im Studienportal zu den Vorleistungen für die Klausur *Moderne Theoretische Physik I (Theo D, Quantenmechanik)* an.

Aufgabe 14: Kohärente Zustände (20 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator,

$$H = \hbar\omega \left[a^\dagger a + \frac{1}{2}\right] \quad \text{mit} \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{x_0 P}{\hbar}\right) \quad \text{und} \quad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \quad .$$

Kohärente Zustände $|\lambda\rangle$ sind Eigenzustände des Vernichtungsoperators:

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \quad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad . \tag{1}$$

a) Berechnen Sie den Kommutator $[a, \exp(\lambda a^\dagger)]$ mit Hilfe der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel. Zeigen Sie nun, dass
$$|\lambda\rangle \equiv N_\lambda e^{\lambda a^\dagger}|0\rangle$$
die Eigenwertgleichung (1) erfüllt. $N_\lambda > 0$ ist eine Normierungskonstante. (2 Punkte)

b) Bestimmen Sie N_λ aus der Normierungsbedingung $\langle\lambda|\lambda\rangle = 1$.
Hinweis: Betrachten Sie $1 = \langle\lambda|\lambda\rangle = N_\lambda^*\langle 0|\exp[\lambda^* a]|\lambda\rangle$. (2 Punkte)

c) Berechnen Sie $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ sowie ΔX und ΔP im Zustand $|\lambda\rangle$.
Hinweis: Drücken Sie dazu die Operatoren X und P durch a und $a^\dagger$ aus. (4 Punkte)

d) Entwickeln Sie $|\lambda\rangle$ nach Energie-Eigenkets $|n\rangle$, also $|\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|\lambda\rangle$. Es sei $P_n(\lambda)$ die Wahrscheinlichkeit, die Energie $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ im Zustand $|\lambda\rangle$ zu messen. Zeigen Sie, dass
$$P_n(\lambda) = \frac{(|\lambda|^2)^n}{n!}e^{-|\lambda|^2}$$

die Poissonverteilung ist. Welcher Messwert $\hat{E}$ ist der Wahrscheinlichste? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\lambda|H|\lambda\rangle$. Ist er größer oder kleiner als $\hat{E}$?
Hinweis: Zur Bestimmung des Maximums der Poissonverteilung betrachten Sie das Verhältnis $P_{n+1}(\lambda)/P_n(\lambda)$. (2 Punkte)

e) Aus der bekannten Zeitentwicklung $|n,t\rangle = \exp[-iE_n t/\hbar]|n\rangle$ ergibt sich mit dem Ergebnis der Teilaufgabe (d) direkt die Zeitentwicklung von $|\lambda\rangle$. Zeigen Sie, dass $|\lambda,t\rangle$ durch

$$|\lambda,t\rangle = e^{-i\omega t/2}|\lambda(t)\rangle \quad \text{mit} \quad \lambda(t) = \lambda e^{-i\omega t}$$

gegeben ist. Wenn ein Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ kohärent ist, bleibt er dann für $t > 0$ kohärent? (2 Punkte)

f) Bestimmen Sie nun $\langle X\rangle$, $\langle P\rangle$ sowie ΔX und ΔP im Zustand $|\lambda,t\rangle$ aus Ihren Ergebnissen der Teilaufgaben (c) und (e). Schreiben Sie dabei $\lambda = |\lambda|\exp(i\delta)$. Diskutieren Sie Ihr Ergebnis: Erfüllen $\langle X\rangle(t)$ und $\langle P\rangle(t)$ die klassischen Bewegungsgleichungen? Zerfließt der Zustand? Was ist das Unschärfeprodukt $(\Delta X)(\Delta P)$? (2 Punkte)

g) Berechnen Sie die Ortsdarstellung $\psi_\lambda(x,t) \equiv \langle x|\lambda,t\rangle$ des Zustandes $|\lambda,t\rangle$. Diskutieren Sie $|\psi_\lambda(x,t)|^2$ im Hinblick auf Schwerpunkt und Breite des Wellenpaketes.
Hinweis: Lösen Sie zunächst die Eigenwertgleichung von a für $t = 0$: $a\psi_\lambda(x) = \lambda\psi_\lambda(x)$. (3 Punkte)

h) Betrachten Sie für $l \in \mathbb{R}$:

$$|l\rangle \equiv \mathcal{T}_l|0\rangle \quad ,$$

wobei $\mathcal{T}_l = \exp[\frac{i}{\hbar}Pl]$ der Translationsoperator ist (vgl. Aufgabe 7c). Wie hängt $|l\rangle$ mit $|\lambda\rangle$ aus (1) zusammen? Sie dürfen dabei verwenden, dass

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-[A,B]/2}$$

gilt, sofern $[A,B]$ sowohl mit A als auch mit B vertauscht. Geben Sie $\psi_l(x) := \langle x|l\rangle$ an. (3 Punkte)