

Quantenmechanik I SS 11PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH**Übungsblatt 9**
Abgabe 17.06.2011
Besprechung 22.06.2011

Name: _____ Matrikel-Nr: _____ Gruppe: _____
(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 15: Elektron im elektromagnetischen Feld (7 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron, das einem elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi(\mathbf{x})$ und einem magnetischen Feld $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x})$ ausgesetzt ist. Beide Felder seien zeitlich konstant. Der Hamilton-Operator ist

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\Pi}^2 - e\Phi \quad , \quad (1)$$

wobei der kinetische Impuls $\boldsymbol{\Pi}$ durch

$$\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{P} + e\mathbf{A}(\mathbf{X})$$

gegeben ist. $\mathbf{P}$ ist der kanonische Impuls.

- a) Leiten Sie aus den Vertauschungsrelationen $[P_j, P_k] = [X_j, X_k] = 0$ und $[X_j, P_k] = i\hbar\delta_{jk}$ die Vertauschungsrelation für die Π_i ab:

$$[\Pi_i, \Pi_j] = -ie\hbar\varepsilon_{ijk}B_k(\mathbf{X}) \quad .$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für differenzierbare Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Gleichung $[P_i, f(\mathbf{X})] = -i\hbar(\nabla_i f)(\mathbf{X})$ gilt. (3 Punkte)

- b) Berechnen Sie $[H, \Pi_j]$ und $[H, X_j]$ mit H aus (1). (2 Punkte)
- c) Geben Sie im Heisenbergbild die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{X}(t)$ und $\boldsymbol{\Pi}(t)$ an. (1 Punkt)
- d) Geben Sie die quantenmechanische Form der Lorentz-Kraft an, indem Sie $m d^2\mathbf{X}/(dt^2)$ bestimmen. (1 Punkt)

Aufgabe 16: Landau-Niveaus

(7 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator aus (1) mit $\Phi = 0$ und $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ und zeitlich konstantem B .

a) Berechnen Sie $\mathbf{B}$.

(1 Punkt)

b) Bringen Sie H in die Form

$$H = \frac{\Pi_3^2}{2m} + \hbar\omega_c(a^\dagger a + \tfrac{1}{2}) \quad \text{mit} \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad .$$

Drücken Sie a durch Π_1 und Π_2 aus und bestimmen Sie die Zyklotronfrequenz ω_c .

(4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Energie-Eigenwerte (die sog. Landau-Niveaus) durch

$$E_{k_z, n} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} + \hbar\omega_c(n + \tfrac{1}{2})$$

mit $k_z \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben sind.

(2 Punkte)

Aufgabe 17: Bahndrehimpuls

(6 Punkte)

Der Bahndrehimpuls-Operator ist $\mathbf{L} = \mathbf{X} \times \mathbf{P}$.

a) Berechnen Sie $[X_j, L_k]$ und $[P_j, L_k]$.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie $[L_j, L_k]$.

(2 Punkte)

c) In der klassischen Mechanik gilt die Beziehung

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{x}^2 \mathbf{p}^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{p})^2 \quad .$$

In der Quantenmechanik entsteht ein zusätzlicher Term dadurch, daß die Orts- und Impulsoperatoren nicht kommutieren. Bestimmen Sie diesen Term.

(2 Punkte)