Quantenmechanik I SS 11

PROF. U. NIERSTE
DR. M. WIEBUSCH

Übungsblatt 11
Abgabe 01.07.2011
Besprechung 06.07.2011

Name: Matrikel-Nr: Gruppe:

(Bitte Ausfüllen und an die Lösung heften.)

Aufgabe 20: Elektromagnetische Wechselwirkung und Eichinvarianz(12 Punkte)

Die Kopplung eines Elektrons an ein elektromagnetisches Feld wird nach dem Prinzip der minimalen Kopplung durch die Ersetzung

$$\frac{\partial}{\partial t} \to \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar}\Phi \quad , \quad \boldsymbol{\nabla} \to \boldsymbol{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A} \quad , \tag{1}$$

in der Schrödinger-Gleichung beschrieben. Die Potenziale $\Phi \equiv \Phi(t, \boldsymbol{x})$ und $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}(t, \boldsymbol{x})$ hängen dabei von $\boldsymbol{x}$ und t ab.

a) Zeigen Sie, dass die Vorschrift aus (1) den Hamilton-Operator aus Aufgabe 15 liefert und das quantenmechanische Äquivalent der Lorentz-Kraft im Schrödinger-Bild somit durch

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}\boldsymbol{\Pi}^2 - e\Phi\right]\psi \quad , \quad \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A} \quad . \tag{2}$$

gegeben ist. (1 Punkt)

b) Gleichung (2) ist offensichtlich nicht invariant unter Eichtransformationen

$$\Phi \to \Phi' = \Phi + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad , \quad \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\Lambda \quad , \quad \Lambda \equiv \Lambda(t, \boldsymbol{x}) \quad , \tag{3}$$

obwohl die Potenziale Φ, $\boldsymbol{A}$ und Φ', $\boldsymbol{A}'$ die selben $\boldsymbol{E}$- und $\boldsymbol{B}$-Felder für jedes $\Lambda(t, \boldsymbol{x})$ liefern. (Erinnern Sie sich an $\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{A}/\partial t - \boldsymbol{\nabla}\Phi$ und $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$). Transformieren Sie nun die Wellenfunktion gemäß $\psi \to \psi' = \exp(i\frac{e}{\hbar}\Lambda)\psi$ und zeigen Sie, dass ψ' eine Lösung der Schrödinger-Gleichung mit den transformierten Potenzialen Φ', A' ist, sofern ψ eine Lösung von (2) ist. Was bewirkt eine Eichtransformation mit $\Lambda = at$ und $a \in \mathbb{R}$? (4 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass die Matrixelemente der Operatoren $\boldsymbol{X}$ und $\boldsymbol{\Pi}$ eichinvariant sind. Was ist mit Matrixelementen des kanonischen Impulses $\boldsymbol{P}$? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. Ist die Physik invariant unter Eichtransformationen?
Hinweis: Unter Eichtransformationen verändern sich die Zustände *und* der Operator $\boldsymbol{\Pi}$. (2 Punkte)

d) Die *kovarianten Ableitungen* sind definiert als

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - i\frac{e}{\hbar}\Phi \quad , \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\nabla} + i\frac{e}{\hbar}\boldsymbol{A} \quad .$$

Zeigen Sie, dass sich $D_t\psi$ and $\boldsymbol{D}\psi$ wie ψ transformieren, also $D_t\psi \to (D_t\psi)' = \exp(i\frac{e}{\hbar}\Lambda)D_t\psi$ und Entsprechendes für $\boldsymbol{D}\psi$ gilt. Drücken Sie die Schrödingergleichung (2) durch die kovarianten Ableitungen aus. Benutzen Sie diese Form, um (erneut) die Eichinvarianz der Schrödingergleichung zu zeigen. (2 Punkte)

e) Definieren Sie $D_\mu = (D_t/c, D_x, D_y, D_z)$ und zeigen Sie die Beziehung:

$$[D_\mu, D_\nu] = i\frac{e}{\hbar}F_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

(2 Punkte)

f) Die Wellenfunktion ψ erfülle die freie Schrödinger-Gleichung (d.h. ohne elektromagnetische Felder). Zeigen Sie, daß dann $\psi' = \exp(i\frac{e}{\hbar}\Lambda)\psi$ ein Teilchen im elektromagnetischen Potenzial mit $\Phi = \partial\Lambda/\partial t$ und $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\Lambda$ beschreibt. Erklären Sie unter Berücksichtigung des Ergebnisses von Teilaufgabe (b) den Satz: *Die Invarianz der Theorie bezüglich lokalen (also Raum- und Zeit-abhängigen) Phasentransformationen der Wellenfunktion impliziert Elektromagnetismus.* (1 Punkt)

Aufgabe 21: Flußquantisierung und Aharonov-Bohm-Effekt (8 Punkte)

In der klassischen Elektrodynamik ist die Bewegung eines Teilchens durch die elektrischen und magnetischen Felder bestimmt, die Potenziale sind bloß mathematische Hilfsmittel. In Aufgabe 20 haben wir gesehen, dass in der Quantenmechanik Eichfelder eine wichtigere Rolle spielen und Eichtransformationen den Zustand des Systems ändern, wenn auch nur über einen scheinbar harmlosen Phasenfaktor. In dieser Aufgabe werden wir einen physikalischen Effekt dieser Phasentransformation betrachten. Die weiterreichende konzeptionelle Konsequenz ist, dass die Potenziale $(\boldsymbol{A}, \Phi)$ physikalische Relevanz haben (und in der Quantenfeldtheorie mit dem Photon zusammenhängen).

a) Betrachten Sie ein einfach zusammenhängendes Gebiet G mit $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B} = 0$. Zeigen Sie, dass das Vektorpotenzial die Form $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{x})$ hat, wobei $f(\boldsymbol{x})$ eine beliebige relle Funktion sein kann. Zeigen Sie weiter, dass sich f bis auf eine Konstante schreiben läßt als

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x}' \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}') \quad , \tag{4}$$

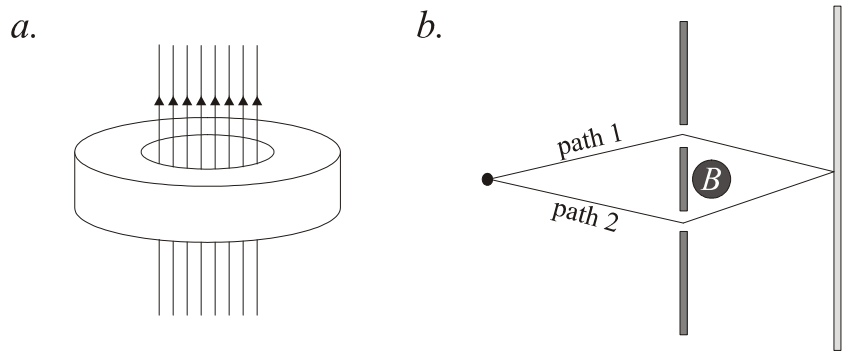

Abbildung 1: Aharonov-Bohm-Effekt

wobei die Integration von $\boldsymbol{x}_0$ nach $\boldsymbol{x}$ entlang eines Pfades verläuft, der vollständig in G liegt. Zeigen Sie, dass diese Definition von f unabhängig von der Wahl des Integrationspfads ist.
Hinweis: Sie dürfen die aus der Elektrodynamik bekannten Sätze über Rotations- und Gradientenfelder benutzen. (2 Punkte)

b) Betrachten Sie einen ringförmigen supraleitenden Magneten (Abb. 1a). Es ist $\boldsymbol{B} = 0$ im Magneten (*Meißner-Ochsenfeld-Effekt*), aber $\boldsymbol{B} \neq 0$ außerhalb des Rings. Zeigen Sie, daß der magnetische Fluß Φ_B durch den Ring gegeben ist durch

$$\Phi_B = \oint d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \quad ,$$

wobei das Integral entlang einer geschlossenen Kurve im Inneren des Rings verläuft.

c) Betrachten Sie nun ein Teilchen im Inneren des ringförmigen Magneten. Folgern Sie aus der Eindeutigkeit der Wellenfunktion, dass der magnetische Fluss Φ_B durch den Ring quantisiert ist,

$$\Phi_B = \frac{2\pi\hbar}{e} n \quad , \quad n \in \mathbb{Z} \quad .$$

Betrachten Sie dazu eine Lösung ψ der freien Schrödingergleichung ($\boldsymbol{A} = \Phi = 0$) mit $\psi = 0$ außerhalb des Rings. Zerlegen Sie den Ring in zwei einfach zusammenhängende Gebiete und benutzen Sie Aufgabe 20f, um gebietsweise eine Lösung der Schrödingergleichung (2) mit $\boldsymbol{A} \neq 0$ zu konstruieren.

(2 Punkte)

d) Betrachten Sie das Doppelspalt-Experiment in Abb. 1b. In dem mit $\boldsymbol{B}$ gekennzeichneten Gebiet befinde sich ein Magnetfeld. Es seien ψ_1 und ψ_2 die Lösungen der Schrödingergleichung für den Fall, dass nur Spalt 1 bzw. 2 geöffnet ist. Drücken Sie analog zu (c) ψ_1 und ψ_2 durch die entsprechenden Lösungen $\psi_1^{\boldsymbol{B}=0}$ und $\psi_2^{\boldsymbol{B}=0}$ für den Fall $\boldsymbol{B} = 0$ aus. Zeigen Sie, daß bei Öffnung beider Spalte das Interferenzbild auf dem Schirm von $\boldsymbol{B}$ abhängt. Dies ist der *Aharonov-Bohm-Effekt*. Ist der Effekt dadurch zu erklären, daß die Wellenfunktionen der Teilchen mit dem Magnetfeld überlappen? (2 Punkte)