Aufgabe 1: Skalarprodukte

7 Punkte

Sei $\mathcal{V}$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Dann ist das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (auch mit $\langle \cdot | \cdot \rangle$ bezeichnet) eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$$

mit den Eigenschaften

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle^*, \quad x_1, x_2 \in \mathcal{V}, \quad (1)$$

$$\langle x, a_1 x_1 + a_2 x_2 \rangle = a_1 \langle x, x_1 \rangle + a_2 \langle x, x_2 \rangle, \quad x, x_1, x_2 \in \mathcal{V}, a_1, a_2 \in \mathbb{C}, \quad (2)$$

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad (3)$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0. \quad (4)$$

a) Sei L^2 der Raum der quadratintegrablen Funktionen, d.h.

$$L = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Betrachten wir des weiteren nur stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx$$

ein Skalarprodukt definiert, d.h. die Bedingungen (1)-(4) erfüllt. Zeigen Sie insbesondere, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x)dx < \infty \quad \forall f, g \in L^2.$$

Die Existenz eines Skalarproduktes macht L^2 zu einem Prä-Hilbert-Raum. Man kann weiterhin zeigen, dass L^2 vollständig und somit ein Hilbert-Raum ist.

b) Betrachten Sie die Funktionen $f_n(x)$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 0$ definiert durch

$$f_n(x) = \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{n!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad [n/2] = \begin{cases} n/2 & n \text{ gerade} \\ (n-1)/2 & n \text{ ungerade} \end{cases}.$$

- Geben Sie $f_i(x)$ explizit für $0 \leq i \leq 3$ an.
- Berechnen Sie die Skalarprodukte $\langle f_i, f_j \rangle$ für $i, j \leq 3$. Können Sie das allgemeine Ergebnis raten?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

unter Verwendung von

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = \left(\left(-\frac{d}{d\alpha} \right)^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right) \Big|_{\alpha=1}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 2: Delta-Distribution

6 Punkte

Die Delta-Distribution $\delta(x)$ ist definiert durch die Vorschrift

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)f(x)dx = f(0) \quad \text{für alle Funktionen } f \text{ mit } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}, \quad a > 0; a \in \mathbb{R}$$

für $a \rightarrow 0$ gegen die Delta-Funktion konvergiert.

b) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln:

(i) $\delta'(x)f(x) = -\delta(x)f'(x)$

(ii) $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, mit $f(x_i) = 0$ und $f'(x_i) \neq 0$

Aufgabe 3: Fouriertransformation

7 Punkte

Die Fouriertransformierte $\tilde{f} = \mathcal{F}(f)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$\tilde{f}(k) = \mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx.$$

Die Rücktransformation ist entsprechend gegeben durch

$$f(x) = \mathcal{F}^\dagger(\tilde{f}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{f}(k) dk.$$

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte der folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = e^{-ax^2/c^2}$, $a > 0; a, c \in \mathbb{R}$

Welche Form hat die Fouriertransformierte?

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$, $a > 0; a \in \mathbb{R}$

Was findet man im Limes $a \rightarrow 0$ für die Funktion und ihre Fouriertransformierte?

b) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften der Fouriertransformation:

(i) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n -mal stetig differenzierbar und die n -te Ableitung $f^{(n)}$ integrierbar, dann gilt

$$\mathcal{F}(f^{(n)}) = (it)^n \tilde{f}(k).$$

Ist $x^n f(x)$ integrierbar, gilt

$$\mathcal{F}((-ix)^n f(x)) = \tilde{f}^{(n)}(k).$$

(ii) Bezeichne $f \circ g$ die Faltung zweier Funktionen $(f \circ g)(x) = \int f(x-y)g(y) dy$, so gilt

$$\mathcal{F}(f \circ g) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k),$$

falls die Fouriertransformierte existiert.