Aufgabe 1: Wellenpakete

13 Punkte

a) Betrachten Sie ein Wellenpaket der Form

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk g(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

mit

$$g(k) = C \exp \left[-\frac{1}{2a^2} (k - k_0)^2 \right], \quad a, C > 0.$$

(i) Bestimmen Sie die Konstante C aus der Normierungsbedingung $\int |g(k)|^2 dk = 1$.

(ii) Berechnen Sie $\Psi(x, t)$.

b) Zeigen Sie, dass sich das Ergebnis aus a) in die Form

$$\Psi(x, t) = \frac{Ca}{\sqrt{1 + i\frac{a^2\hbar t}{m}}} \exp \left[-\frac{a^2(x - v_0 t)^2}{2(1 + i\frac{a^2\hbar t}{m})} \right] \exp [i(k_0 x - \omega_0 t)]$$

mit $v_0 = \hbar k_0/m$ und $\omega_0 = \hbar k_0^2/(2m)$ bringen lässt.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von Ort und Impuls:

$$\langle x \rangle = \int dx \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) \quad \langle p \rangle = \int dx \Psi^*(x, t) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t).$$

Notation:

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_{\Psi} = \langle \Psi | A | \Psi \rangle = \langle \Psi | A \Psi \rangle = \int \Psi^*(x) A \Psi(x) dx, \quad p = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$$

d) Als Maß für die Breite des Gaußschen Wellenpakets definiert man Δx durch

$$(\Delta x)^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

und entsprechend Δp . Berechnen Sie Δx und Δp als Funktion der Zeit. Wie verhalten sich $\langle p \rangle$ und Δp als Funktion der Zeit? (Begründung.)

e) Kommentieren Sie das raum-zeitliche Verhalten von $|\Psi(x, t)|^2$.

f) Innerhalb welcher Zeitspanne T verdoppelt sich die bei $t = 0$ vorhandene Breite $(\Delta x)_{t=0}$ in den folgenden Fällen ($\hbar = 10^{-34}$ Js):

(i) Elektron, $(\Delta x)_{t=0} \approx 10^{-8}$ cm, d.h. anfängliche Lokalisierung innerhalb einer dem Atomdurchmesser entsprechenden Strecke ($m_e = 0,9 \times 10^{-27}$ g).

(ii) Elektron, $(\Delta x)_{t=0} \approx 10^{-1}$ cm, vielleicht typisch für die Blendenöffnungen bei Versuchen im Labor.

(iii) Makroskopische Masse $m = 1$ g, $(\Delta x)_{t=0} \approx 1$ cm.

Aufgabe 2: Potentialtöpfe

7 Punkte

Betrachten Sie ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| \geq a \\ 0, & |x| \leq a \end{cases} .$$

- a) Betrachten Sie zunächst den Fall $V_0 = \infty$ und bestimmen Sie alle Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$H\Psi(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x) = E\Psi(x)$$

mit der Energie $E > 0$. In diesem Fall ist die Aufenthaltswahrscheinlichkeit in den Bereichen mit $|x| \geq a$ gleich Null.

- b) Betrachten Sie nun den Fall $V_0 < \infty$ und bestimmen Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung für $0 < E < V_0$.

(i) Stellen Sie die Anschlussbedingungen für $x = \pm a$ auf.

(ii) Lösen Sie die Schrödingergleichung für die Bereiche $(-\infty, -a)$, $(-a, a)$ und (a, ∞) und nutzen Sie die Anschlussbedingungen aus, um die Lösungen geeignet zu verbinden.

Hinweis: Die Anschlussbedingungen führen auf eine Quantisierungsbedingung für die Energie, die sich nicht analytisch auflösen lässt.