Aufgabe 1: Potentialbarrieren

10 Punkte

Betrachten Sie ein Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases} .$$

Betrachten Sie den Fall $V_0 > 0$ und bestimmen Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung mit der Energie $0 < E < V_0$. Nehmen Sie an, dass die Welle von links einläuft.

- Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für die verschiedenen Bereiche.
- Stellen Sie die Anschlussbedingungen auf.
- Lösen Sie die Anschlussbedingungen auf und berechnen Sie Transmissions- und Reflexionskoeffizienten T und R .
- Zeigen Sie, dass

$$T + R = 1$$

ist.

- Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem klassischen Fall.

Aufgabe 2: δ -Potential

6 Punkte

Betrachten Sie ein Potential der Form

$$V(x) = V_0 \delta(x), V_0 > 0 .$$

- In diesem Problem ist die Wellenfunktion stetig, die erste Ableitung ist jedoch nicht stetig. Berechnen Sie den Sprung der ersten Ableitung der Wellenfunktion, indem Sie die Schrödingergleichung von $-\epsilon$ bis ϵ integrieren und den Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ durchführen.
- Berechnen Sie die Lösungen der stationären Schrödingergleichung mit Energie $E > 0$. Nehmen Sie hierbei an, dass die Welle von links einläuft.

Aufgabe 3: Hermitesche Operatoren

4 Punkte

In der Quantenmechanik treten aufgrund des Superpositionsprinzips nur lineare Operatoren auf. Lineare Operatoren auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ sind Abbildungen

$$A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$$

mit den Eigenschaften

$$A(\lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \Psi_2) = \lambda_1 A\Psi_1 + \lambda_2 A\Psi_2, \quad \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} .$$

Lineare Operatoren lassen sich auf endlich-dimensionalen Räumen durch Matrizen darstellen. Von besonderer Bedeutung sind hermitesche Operatoren. Dies sind lineare Operatoren, die zusätzlich die Bedingung

$$\langle \Psi_1, A\Psi_2 \rangle = \langle A\Psi_1, \Psi_2 \rangle \quad \forall \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}$$

(bitte wenden)

erfüllen. Die hermitesche Konjugation ($\dagger$) eines linearen Operators A wird definiert über

$$\langle \Psi_1, A\Psi_2 \rangle = \langle A^\dagger \Psi_1, \Psi_2 \rangle \quad \forall \Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{H}.$$

Zeigen Sie

- a) Die Eigenwerte eines hermiteschen Operators sind reell.
- b) Für die Matrizen­darstellung in endlich-dimensionalen Räumen gilt $A^\dagger = (A^*)^T$
- c) Kommutieren zwei Operatoren A, B , d.h. $[A, B] = AB - BA = 0$, dann lassen sie sich gleichzeitig diagonalisieren.