Aufgabe 1: Reflexion eines Wellenpakets

4 Punkte

- a) Ebene Wellen (mit Energie $E = k^2 \hbar^2 / (2m)$, $E < V_0$) erfahren bei Reflexion an einer Potentialstufe der Höhe V_0 , also an dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases},$$

einen Phasensprung um 2ϕ . Die Lösung der Schrödingergleichung hat also für $x < 0$ die Form

$$\Psi_-(x) = e^{ikx} + e^{-2i\phi} e^{-ikx}.$$

Berechnen Sie ϕ als Funktion von m , V_0 und k . Lösen Sie hierzu wie gewohnt die Schrödingergleichung, indem Sie die Anschlussbedingungen bei $x = 0$ ausnutzen.

- b) Ein Wellenpaket mit Verteilung $g(k)$ (Maximum bei k_0 mit $k_0^2 \hbar^2 / (2m) < V_0$, lokalisiert um k_0) wird an derselben Stufe reflektiert. Das reflektierte Wellenpaket hat eine Zeitverzögerung von δt gegenüber dem entsprechenden klassischen Teilchen.

Betrachten Sie die Fourierdarstellung des Wellenpakets (vgl. Aufgabe 1a) Blatt 2, die Funktion $g(k)$ muss nicht explizit eingesetzt werden) jeweils vor und nach der Reflexion. Entwickeln Sie das Argument der Exponentialfunktion bis zur ersten Ordnung in k um k_0 . Der k -abhängige Teil der Exponentialfunktion des Wellenpakets lässt sich auf die Form $\exp(i(k - k_0)(x - x_0))$ bringen. Bestimmen Sie den Ort des Maximums der Wellenfunktion x_0 vor und nach der Reflexion. Durch Vergleich der Ergebnisse für x_0 lässt sich die Zeitverzögerung bestimmen.

Aufgabe 2: Fourier-Entwicklung

4 Punkte

Die trigonometrischen Funktionen

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bilden auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ ein orthonormales Funktionensystem. Dieses System ist vollständig, so dass für alle (quadratintegrablen) Funktionen $f(x)$ die zugehörige Fourier-Reihe im Mittel gegen $f(x)$ konvergiert:

$$f_N(x) = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right) \rightarrow f(x) \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Die Fourierkoeffizienten berechnen sich dabei durch

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x), \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \cos nx, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dx f(x) \sin nx.$$

- a) Zeigen Sie, dass für gerade Funktionen (bzw. ungerade Funktionen) die Koeffizienten b_n (bzw. a_n) verschwinden.

- b) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin(2x) & -\pi \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(bitte wenden)

c) Führen Sie außerdem die Fourieranalyse durch für die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Aufgabe 3: Orthonormalsysteme

6 Punkte

Der Zustandsraum für ein physikalisches System sei durch die Orthonormalbasis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ aufgespannt. Die Vektoren $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$ seien gegeben durch:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{2}|2\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|3\rangle \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{-i}{\sqrt{3}}|3\rangle \end{aligned}$$

- Normieren Sie $|\Psi_1\rangle$ und $|\Psi_2\rangle$. Suchen Sie einen Vektor $|\Psi_3\rangle$ derart, dass $\{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis bildet.
- Berechnen Sie die Matrizen, die in der Basis $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ die Projektoren auf $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$ bzw. $|\Psi_3\rangle$ darstellen und zeigen Sie, dass diese Matrizen hermitesch sind. Überprüfen Sie die Vollständigkeit $\sum_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = 1$.

Aufgabe 4: Eigenwerte, -funktionen und Projektoren

6 Punkte

In einem dreidimensionalen Vektorraum sei $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ eine Orthonormalbasis, bezüglich derer der Operator L_y die folgende Matrixdarstellung besitze:

$$L_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Ist L_y hermitesch? Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren bezüglich obiger Basis.
- Berechnen Sie den Projektor auf die Eigenvektoren. Prüfen Sie die Orthogonalität und die Vollständigkeit.