## ÜBUNGEN ZUR MODERNEN THEORETISCHEN PHYSIK I — BLATT 5

Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 21.05.2012, 11:30 Uhr
Besprechung: Mittwoch, 23.05.2012

### *Aufgabe 1: kommutierende Operatoren* — 8 Punkte

Ein dreidimensionaler Vektorraum sei durch eine Orthonormalbasis aufgespannt, bezüglich derer zwei Operatoren $H$ und $B$ wie folgt definiert sind ($\omega, b$ reell):

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

*a)* Zeigen Sie, dass $H$ und $B$ hermitesch sind. Die Eigenwerte beider Operatoren sind folglich reell. Wie lauten Sie?

*b)* Zeigen Sie, dass der Kommutator $[H, B]$ verschwindet. Es existiert daher ein Satz gemeinsamer Eigenvektoren zu $H$ und $B$. Geben Sie eine Orthonormalbasis an, die aus derartigen Eigenvektoren gebildet ist.

*c)* Wegen der Vertauschbarkeit von $H$ und $B$ muss es eine Basis geben, bezüglich derer beide Matrizen Diagonalgestalt haben (mit den jeweiligen Eigenwerten in der Diagonalen). Finden Sie eine Übergangsmatrix $U$ für solch einen Basiswechsel, d. h. gesucht ist eine unitäre Matrix $U$, so dass $B' = UBU^\dagger$ und $H' = UHU^\dagger$ beide diagonal sind.

*d)* Welche der Mengen $\{H\}$, $\{B\}$, $\{H, B\}$, $\{H^2, B\}$ von Operatoren bilden einen vollständigen Satz von kommutierenden Observablen?

### *Aufgabe 2:* — 12 Punkte

Betrachten wir ein Potential der Form

$$V(x) = -V_0\delta(x) \quad \text{mit} \quad V_0 > 0\,.$$

*a)* Es existiert ein gebundener Zustand ($E < 0$). Zeigen Sie, dass dieser Zustand gegeben ist durch:

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\rho}e^{-\rho|x|} \qquad \text{mit} \qquad \rho = (mV_0)/\hbar^2\,.$$

*b)* Für Steuzustände ($E > 0$) mit von links einlaufenden Wellen ergibt sich (vgl. Blatt 3, Aufgabe 2):

$$\Phi_p^l(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \left\{ \begin{array}{lcl} e^{ipx/\hbar} - \frac{1}{1+i\kappa}e^{-ipx/\hbar} & , & x \le 0 \\ \frac{i\kappa}{1+i\kappa}e^{ipx/\hbar} & , & x > 0 \end{array} \right\}$$

mit $p = \sqrt{2mE}$ und $\kappa = p/(\rho\hbar)$.

*c)* Um ein vollständiges Orthonormalsystem zu konstruieren, benötigen wir noch Streuzustände mit von rechts einlaufenden Wellen $\Phi_p^r(x)$. Bestimmen Sie $\Phi_p^r(x)$.

*d)* Das System ist orthonormiert, also müssen folgende Relationen gelten:

$$\begin{array}{ll} 1.)\ \langle\Psi_0|\Psi_0\rangle = 1 & 2.)\ \langle\Psi_0|\Phi_p^l\rangle = 0 \\ 3.)\ \langle\Psi_0|\Phi_p^r\rangle = 0 & 4.)\ \langle\Phi_p^l|\Phi_{p'}^l\rangle = \delta(p-p') \\ 5.)\ \langle\Phi_p^r|\Phi_{p'}^r\rangle = \delta(p-p') & 6.)\ \langle\Phi_p^l|\Phi_{p'}^r\rangle = 0 \end{array}$$

(bitte wenden)

mit $\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \Psi_0^*(x) \Psi_0(x)$, usw.
Verifizieren Sie die Relation 1.), 2.), 4.) und 6.).
Hinweis: Verwenden Sie $\int_0^\infty dx\, e^{ikx} = \frac{i}{k} + \pi\delta(k)$

*e)* Zeigen Sie für den Fall $x > 0$ und $x' > 0$, dass das System vollständig ist, also dass

$$\Psi_0(x)\Psi_0(x') + \int_0^\infty dp\ \Phi_p^{l^*}(x)\Phi_p^l(x') + \int_0^\infty dp\ \Phi_p^{r^*}(x)\Phi_p^r(x') = \delta(x - x')$$

gilt.
Hinweis: Die Integrale $\int_0^\infty dx \frac{\cos(ax)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}$ und $\int_0^\infty dx \frac{x\sin(bx)}{1+x^2} = \mathrm{sign}(b) \frac{\pi}{2} e^{-|b|}$ sind nützlich.