Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Dienstag, 29.05.2012, 11:30 Uhr
Besprechung: Mittwoch, 30.05.2012

Aufgabe 1: Virialsatz — 6 Punkte

Gegeben sei der (eindimensionale) Hamiltonoperator $H = \frac{P_x^2}{2m} + V(X)$. Zeigen Sie, dass für einen stationären Zustand $\frac{d}{dt}\langle XP_x\rangle = 0$ gilt, und leiten Sie daraus den Virialsatz

$$\frac{i}{\hbar}\langle X[P_x, V(X)]\rangle = 2\left\langle \frac{P_x^2}{2m}\right\rangle$$

her. Benutzen Sie hierzu $\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar}\langle [H, A]\rangle + \langle \frac{\partial}{\partial t}A\rangle$ für $A = XP_x$.
Was erhalten Sie für $V(x) = \lambda x^n$ und speziell für $n = 2$?

Aufgabe 2: Harmonischer Oszillator I — 7 Punkte

Für den linearen harmonischen Oszillator mit den Energie-Eigenzuständen $|\Phi_n\rangle$ sind mit Hilfe der Operatoren a und $a^\dagger$ die folgenden Größen zu berechnen:

a) die Matrixelemente $\langle \Phi_m|X|\Phi_n\rangle$ und $\langle \Phi_m|P|\Phi_n\rangle$,

b) das Produkt $(\Delta x)(\Delta p)$ mit

$$(\Delta x)^2 = \langle \Phi_n|X^2|\Phi_n\rangle - (\langle \Phi_n|X|\Phi_n\rangle)^2$$

und analog für $(\Delta p)^2$,

c) die Erwartungswerte der potentiellen und kinetischen Energie für die Zustände $|\Phi_n\rangle$. Vergleichen Sie das Resultat mit dem von Aufgabe 1.

Aufgabe 3: Harmonischer Oszillator II — 7 Punkte

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator der Masse m und Frequenz ω. Sein Zustand sei zur Zeit $t = 0$ durch

$$|\Psi(0)\rangle = \sum_n c_n|\Phi_n\rangle$$

gegeben, wobei die $|\Phi_n\rangle$ stationäre Zustände zu den Energien $(n + 1/2)\hbar\omega$ sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass eine Energiemessung zu einer beliebigen Zeit $t > 0$ einen Wert größer $2\hbar\omega$ liefert? Geben Sie im Falle $P = 0$ die nichtverschwindenden Koeffizienten c_n an.

b) Für den Rest der Aufgabe seien nur c_0 und c_1 ungleich Null angenommen (auch für Teil c) und d)). Geben Sie Normierungsbedingung für $|\Psi(0)\rangle$ und den Erwartungswert der Energie $\langle H\rangle$ als Funktion von c_0 und c_1 an. Berechnen Sie $|c_0|^2$ und $|c_1|^2$ unter der Annahme, dass $\langle H\rangle = \hbar\omega$ ist.

c) Im Folgenden sei $c_0 > 0$ angenommen. Dadurch wird der Phasenfaktor des normierten Zustands $|\Psi(0)\rangle$ festgelegt. Des Weiteren sei $\langle H\rangle = \hbar\omega$ und $\langle x\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Berechnen Sie dann den Wert für θ_1 in $c_1 = |c_1|\exp(i\theta_1)$.

d) Berechnen Sie mit dem so festgelegten $|\Psi(0)\rangle$ den Zustand $|\Psi(t)\rangle$ für $t > 0$ und bestimmen Sie den Wert für θ_1 zur Zeit t. Was ist der Erwartungswert von $\langle x\rangle(t)$ zur Zeit t?