Prof. Dr. J. Kühn (Theoretische Teilchenphysik)
Dr. P. Marquard (Theoretische Teilchenphysik)

Abgabe: Montag, 04.06.2012, 11:30 Uhr
Besprechung: Mittwoch, 06.65.2012

Aufgabe 1: Gaußsches Wellenpaket im HO — 8 Punkte

Die Wellenfunktion $\Psi(x,t) = \langle x|\Psi(t)\rangle$ für ein Teilchen der Masse m sei zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ durch ein Gaußsches Wellenpaket gegeben:

$$\Psi(x,0) = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\beta^2(x-a)^2\right)$$

Das Teilchen befinde sich im Oszillator-Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ mit $\beta = \sqrt{m\omega/\hbar}$.

a) Berechnen Sie $\Psi(x,t)$. Schieben Sie hierzu in $\langle x|\Psi(t)\rangle = \langle x|e^{-iHt/\hbar}|\Psi(0)\rangle$ einen vollständigen Satz von Energie-Eigenfunktionen $|\phi_n\rangle$ ein.
Zur Berechnung können Sie die folgenden Relationen für die Hermite-Polynome gebrauchen:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-(\xi-\alpha)^2} H_n(\xi) &= \sqrt{\pi}(2\alpha)^n \ , \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\xi)}{n!}\lambda^n &= \exp(-\lambda^2 + 2\lambda\xi) \ .\end{aligned}$$

b) Die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x,t)|^2$ kann in die Form

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \Delta x} \exp\left[-\frac{(x-\langle X\rangle)^2}{2(\Delta x)^2}\right] \ .$$

gebracht werden. Was ergibt sich für den Erwartungswert $\langle X\rangle$ und die Breite Δx?

c) Vergleichen Sie die Resultate mit den bekannten Ergebnissen für das freie Gaußsche Wellenpaket.

Aufgabe 2: Pauli-Matrizen — 6 Punkte

Es seien σ_i $(i = 1,2,3)$ die Pauli-Matrizen und $\mathbb{1}$ die 2×2 Einheitsmatrix.

a) Verifizieren Sie für den Spezialfall $i = 1$, $j = 2$, dass gilt:

$$\begin{aligned}\{\sigma_i, \sigma_j\} &\equiv \sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i = 2\delta_{ij}\,\mathbb{1} \ , \\ [\sigma_i, \sigma_j] &\equiv \sigma_i\sigma_j - \sigma_j\sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k \ .\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe von a) soll gezeigt werden, dass für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{C}^3$ die Identität

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b}\,\mathbb{1} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

gilt.

c) Eine beliebige 2×2 Matrix M sei definiert durch

$$M = a_0\,\mathbb{1} + \vec{a}\cdot\vec{\sigma}\,, \qquad a_0, a_1 \in \mathbb{C} \ .$$

Wie können a_0 und a_i durch die Spuren $Sp(M)$ und $Sp(\sigma_i M)$ ausgedrückt werden?

(bitte wenden)

Aufgabe 3: Operatoridentitäten (freiwillig) 6 Bonuspunkte

Beweisen Sie die folgenden Operatoridentitäten:

a) Die Baker-Hausdorff-Identität:

$$e^A B e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [A, B]_n,$$

wobei $[A, B]_0 \equiv B$, $[A, B]_1 \equiv [A, B]$, $[A, B]_2 \equiv [A, [A, B]]$, $\ldots$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung der Funktion $F(x) = \mathrm{e}^{xA} B e^{-xA}$ in der reellen Variablen x.

b) Falls der Kommutator zweier Operatoren A und B mit diesen kommutiert, gilt die folgende Beziehung:

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung der Funktion $F(x) = e^{xA} e^{xB}$ und wenden Sie die Baker-Hausdorff-Identität an.