Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator III

7 Punkte

Gegeben sei der eindimensionale harmonischen Oszillator. Betrachten Sie normierte Eigenzustände zum Absteigeoperator a , $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

- Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle H \rangle_\alpha$ und die Breite ΔE
- Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortes und Impulses.
- Berechnen Sie die Koeffizienten c_n in der Entwicklung nach Eigenfunktionen des Hamiltonoperators

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle.$$

- Das System befinde sich im Zustand $|\alpha\rangle$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathcal{P}(n)$, das System in einem Zustand mit Energie $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ zu finden. Wo liegt das Maximum der Verteilung?
- Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung des Orts- und Impulserwartungswertes.

Aufgabe 2: Zweizustandssystem

6 Punkte

Betrachten Sie das Zweizustandssystem mit dem Hamiltonoperator

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & W \\ W & E_2 \end{pmatrix}.$$

Eine Basis für die Zustände des Systems sei durch $|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ gegeben.

- Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenzustände in dieser Basis.
- Diskutieren Sie das Verhalten der Eigenwerte und Eigenzustände von H für die Fälle
 - $\frac{E_1}{W}, \frac{E_2}{W} \ll 1$ oder $\frac{E_1}{W}, \frac{E_2}{W} \gg 1$
 - $E_1 \sim E_2$
- Betrachten Sie den Fall $E_1 = E_2$. Das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $|+\rangle$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das System zu einem späteren Zustand im Zustand $|-\rangle$ zu finden?

Aufgabe 3: Spin im Magnetfeld

7 Punkte

Ein Teilchen mit Spin $1/2$ und dem magnetischen Moment $\vec{M} = \gamma\vec{S}$ befinde sich in einem Magnetfeld $\vec{B}_0$ mit $B_x = -\omega_x/\gamma$, $B_y = -\omega_y/\gamma$, $B_z = -\omega_z/\gamma$.

a) Zeigen Sie, dass der Zeitentwicklungsoperator $U(t, 0)$ (mit $|\Psi(t)\rangle = U(t, 0)|\Psi(0)\rangle$) durch

$$U(t, 0) = e^{-iMt}$$

gegeben ist, wobei

$$M = \frac{1}{\hbar}[\omega_x S_x + \omega_y S_y + \omega_z S_z]$$

mit $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$, $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$, $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$ in der Basis $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ der S_z Eigenvektoren (σ_i sind die Pauli-Matrizen). Berechnen Sie die Matrixdarstellung von M in dieser Basis. Zeigen Sie, dass

$$M^2 = \omega_0^2/4 \mathbf{1}, \quad \omega_0 = -\gamma|\vec{B}_0|.$$

Bringen Sie den Operator U in die Form

$$U(t, 0) = \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) - \frac{2i}{\omega_0} M \sin\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right).$$

b) Zur Zeit $t = 0$ befinde sich das System im Zustand $|\Psi(0)\rangle = |+\rangle$. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $\mathcal{P}_{++}(t)$, mit der man den Zustand $|+\rangle$ zu einer beliebigen Zeit findet, durch

$$\mathcal{P}_{++}(t) = |\langle +|U(t, 0)|+\rangle|^2$$

gegeben ist und leiten Sie folgende Beziehung her

$$\mathcal{P}_{++}(t) = 1 - \frac{\omega_x^2 + \omega_y^2}{\omega_0^2} \sin^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right).$$