Aufgabe 1: Drehimpuls I

6 Punkte

Betrachten Sie einen Eigenzustand zu L_z und L^2 mit den Eigenwerten $\hbar m$ und $\hbar^2 l(l+1)$. Alle folgenden Erwartungswerte beziehen sich auf diesen Zustand.

- Zeigen Sie, daß $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$.
- Berechnen Sie $[L_x L_y, L_z]$ und verwenden Sie das Ergebnis, um zu zeigen, daß $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle$.
- Berechnen Sie $\langle (\Delta L_x)^2 \rangle$. Kann ΔL_x verschwinden?
- Es sei $\vec{n}$ ein Einheitsvektor und $L_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \vec{L}$ die Drehimpulskomponente in Richtung $\vec{n}$. Berechnen Sie $\langle L_{\vec{n}} \rangle$.

Aufgabe 2: Drehimpuls II

7 Punkte

Es sei eine Wellenfunktion der Form

$$\psi(\vec{x}) = f(r) \left(1 + \frac{x+y}{r} \right)$$

gegeben, wobei $r = |\vec{x}|$ und die Wellenfunktion ψ normiert ist.

Beantworten Sie für diesen Zustand die folgenden Fragen:

- Wie groß sind die Erwartungswerte von L_z und L^2 ?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von L^2 die Werte $0, 2\hbar^2, 6\hbar^2$ zu finden?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von L_z die Werte $0, \pm\hbar, \pm 2\hbar$ zu finden?

Aufgabe 3: Drehungen und Drehimpuls

7 Punkte

Die nachstehende Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stellt für $|\vec{n}|^2 = 1$ eine Drehung um $\vec{n}$ mit Drehwinkel ϕ dar:

$$R(\vec{n}, \phi)\vec{x} = (\vec{n} \cdot \vec{x})\vec{n} - \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}) \cos \phi + (\vec{n} \times \vec{x}) \sin \phi$$

- Berechnen Sie $R(\vec{n}, \phi)$ für einen infinitesimalen Winkel ϕ .
- Bestimmen Sie die Erzeugenden A_i

$$A_i = \frac{d}{d\phi} R(\vec{n}^{(i)}, \phi)|_{\phi=0}$$

der Drehung, wobei der Vektor $\vec{n}^{(i)}$ durch $n_j^{(i)} = \delta_{ij}$ gegeben ist.

- Berechnen Sie für die Operatoren $M_i = i\hbar A_i$ die Kommutatoren $[M_i, M_j]$.
- Zeigen Sie, daß

$$1 + \frac{i}{\hbar} \delta \vec{n} \cdot \vec{L}, \quad \vec{L} = -i\hbar \vec{x} \times \vec{\nabla}$$

angewendet auf differenzierbare Funktionen $f(\vec{x})$ eine infinitesimale Drehung des Arguments erzeugt.