Informationen:

- Melden Sie sich im Studierendenportal für die Vorleistungen an.
- Die Klausur findet am 21.07.2012 von 13:00 Uhr bis 16:00 Uhr im Audimax und im Gaede-Hörsaal statt.
- Die Anmeldung zur Klausur ist am 18. und 19.07.2012 über das Studierendenportal möglich.
- Falls Sie sich nicht über das Studierendenportal anmelden können, melden Sie sich per E-Mail an peter.marquard@kit.edu für die Klausur an.

Aufgabe 1: Zweidimensionaler harmonischer Operator

10 Punkte

Betrachten Sie den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = H_x + H_y, \quad H_x = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2, \quad H_y = \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 Y^2$$

- a) Geben Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen an. Geben Sie den Grad der Entartung der Zustände an. Bilden $\{H\}$ oder $\{H_x, H_y\}$ vollständige Sätze kommutierender Operatoren?
- b) Betrachten Sie nun zusätzlich Eigenzustände zum Drehimpulsoperator $L_z = XP_y - YP_x$. Zeigen Sie, dass sich L_z mit Hilfe der Auf- und Absteigeoperatoren wie folgt schreiben lässt:

$$L_z = i\hbar(a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y).$$

Wie lässt sich H durch Auf- und Absteigeoperatoren ausdrücken? Kommutieren H und L_z ?

- c) Betrachten Sie nun die Operatoren

$$a_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y),$$

$$a_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y).$$

Wie wirken a_d und a_g auf einen Eigenzustand $|n_x, n_y\rangle$.

Drücken Sie H und L_z durch diese Operatoren aus.

Hinweis: Verwenden Sie die Teilchenzahloperatoren $N_d = a_d^\dagger a_d$ und $N_g = a_g^\dagger a_g$.

- d) Benutzen Sie nun die Basis, die von den Eigenzuständen zu N_d und N_g aufgespannt wird. Analog zu a_x und a_y gilt:

$$|n_d, n_g\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_d! n_g!}} (a_d^\dagger)^{n_d} (a_g^\dagger)^{n_g} |0, 0\rangle.$$

Bildet $\{N_d, N_g\}$ einen vollständigen Satz kommutierender Observablen? Wie lassen sich diese Zustände durch die Energie- und Drehimpulsquantenzahlen n und m beschreiben. Bilden H und L_z einen vollständigen Satz kommutierender Operatoren?

Aufgabe 2: Der starre Rotator

5 Punkte

Der Hamiltonoperator eines starren Rotators ist gegeben durch

$$H = \frac{\vec{L}^2}{2I}.$$

Hier bezeichnet $\vec{L}$ den Drehimpulsoperator und I das Trägheitsmoment.

- Geben Sie die Energieeigenwerte und Eigenzustände des Rotators an.
- Der starre Rotator befinde sich zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem Zustand, der durch die Wellenfunktion

$$u(\theta, \phi) = N(\sin \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi + \sqrt{3} \cos \theta) \quad (1)$$

beschrieben wird, wobei N ein Normierungsfaktor sei. Bestimmen Sie N .

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Drehimpulsquadrates $\vec{L}^2$ den Wert $2\hbar^2$ und gleichzeitig für die z -Komponente des Drehimpulses den Wert Null zu finden?

- Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie im Zustand $u(\theta, \phi)$.

Aufgabe 3: Bessel- und Neumannfunktionen

5 Punkte

Mit Hilfe der dimensionslosen Variablen $\rho = kr$, $\hbar^2 k^2 = 2mE$ lautet die radiale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

$$T_l R_l(\rho) = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right) R_l(\rho) = 0.$$

Ihre Lösungen lauten

$$j_l = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right), \quad n_l = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\cos \rho}{\rho} \right).$$

- Prüfen Sie nach, dass diese Funktionen die Gleichung lösen.
Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Versuchen Sie in $T_l j_l$ bzw. $T_l n_l$ den Faktor $\rho^{-1} d/d\rho$ nach links durchzukommutieren und auf den Ausdruck $[(l-1)\rho^{-1} - d/d\rho] T_{l-1} j_{l-1}(\rho)$ (bzw. $[(l-1)\rho^{-1} - d/d\rho] T_{l-1} n_{l-1}(\rho)$) zu kommen.
- Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen j_l und n_l für sehr kleine und sehr große Werte von ρ .