Aufgabe 1: Wasserstoffradialwellenfunktion

6 Punkte

Der Radialanteil $R_{nl}(r)$ der Wellenfunktion $\langle \vec{r} | n, l, m \rangle = R_{nl}(r) Y_{lm}(\Omega)$ für das Wasserstoffatom ist durch

$$R_{nl}(r) = \frac{2}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{((n+l)!)^3}} a_0^{-3/2} F_{nl} \left(\frac{2r}{na_0} \right),$$

$$F_{nl}(\rho) = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho)$$

gegeben. Dabei lauten für $p, k \in \mathbb{N}_0$ die Laguerre-Polynome

$$L_p^k(\rho) = \frac{(p+k)!}{p!} \frac{e^\rho}{\rho^k} \frac{d^p}{d\rho^p} (\rho^{p+k} e^{-\rho})$$

und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{p!}{[(p+k)!]^3} \int_0^\infty d\rho \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_{p'}^k(\rho) = \delta_{p,p'}$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert des Operators $1/R$ für die Zustände $|n, l, m\rangle$.

b) Verifizieren Sie den Virialsatz

$$2\langle E_{kin} \rangle = -\langle V \rangle$$

unter Verwendung Ihres Ergebnisses aus a).

Aufgabe 2: Korrespondenzprinzip

8 Punkte

Wir wollen das Korrespondenzprinzip am Beispiel des Wasserstoffatoms veranschaulichen. Dazu betrachten wir die Summe aus Zentrifugal- und Coulombpotential für $l = n - 1$ mit $l \neq 0$:

$$V(r) = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}$$

a) Für welchen Wert r_m nimmt $V(r)$ sein Minimum an? Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Erwartungswert des Operators R und ebenso $1/r_m$ mit dem Erwartungswert des Operators $1/R$. Bilden Sie den Limes großer n .

b) Vergleichen Sie $V(r_m)$ mit dem exakten Wert $\langle V \rangle$ für die Bindungsenergie.

Aufgabe 3: Potentialtopf

6 Punkte

Ein Teilchen befinde sich in einem kugelförmigen Potentialtopf vom Radius a mit der Form

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \infty & r \geq a \end{cases}$$

Die Radialanteile der Eigenzustände sind die (bei $r = 0$ regulären) sphärischen Besselfunktionen $j_l(k_{nl}r)$, wobei die k_{nl} auf einfache Weise mit den Energiewerten E_{nl} zusammenhängen.

Aus welcher Gleichung entnimmt man die k_{nl} , bzw. die E_{nl} ? Welchen Wert haben die E_{nl} für $l = 0$? Welches ist der niedrigste Eigenwert für $l = 1$ bzw. $l = 2$?