Aufgabe 1: Addition von Drehimpulsen

6 Punkte

Betrachten Sie den Produktraum von zwei Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen

$$\{|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle\} = \{|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle\} \quad (1)$$

und die Drehimpulsoperatoren $\vec{L}_1^2, \vec{L}_2^2, L_{1,z}, L_{2,z}$ mit

$$\begin{aligned} \vec{L}_1^2|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle &= \vec{L}_2^2|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle, \\ L_{1,z}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle &= \epsilon_1\frac{\hbar}{2}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle, \quad L_{2,z}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \epsilon_2\frac{\hbar}{2}|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle. \end{aligned}$$

Betrachten Sie nun den Gesamtdrehimpuls des Systems

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2.$$

a) Berechnen Sie die Kommutatoren

$$[\vec{L}^2, \vec{L}_i^2], [\vec{L}^2, L_{i,z}], [L_z, \vec{L}_i^2] \text{ und } [L_z, L_{i,z}] \quad \text{für } i = 1, 2.$$

b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $\vec{L}^2$ und L_z in der Basis (1).

c) Finden Sie eine Basis, in der $\vec{L}^2$ und L_z diagonal sind und geben Sie die Eigenzustände und ihre Entartung an.

Aufgabe 2: Streuung an einer harten Kugel

6 Punkte

Eine harte Kugel wird durch $V(r) = \infty$ für $r \leq R$ und $V(r) = 0$ für $r > R$ beschrieben.

Der Lösungsansatz im Bereich $r > R$ für P -Wellen-Streuung lautet

$$u_{k,l=1}(r) = C \left[\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) + a \left(\frac{\cos(kr)}{kr} + \sin(kr) \right) \right]$$

(C = Normierungskonstante).

a) Bestimmen Sie a .

b) Berechnen Sie die Streuphase δ_1 für P -Wellen-Streuung.

c) Zeigen Sie, dass für $k \rightarrow 0$ die Streuphase $\sim (kR)^3$ ist.

Aufgabe 3: Streuung am kugelsymmetrischen Potentialtopf

8 Punkte

Wir wollen gebundene Zustände für S -Wellen ($l = 0$) an einem kugelsymmetrischen Potentialtopf $V(r \leq R) = -V_0, V(r > R) = 0$ untersuchen. Dazu verwenden wir die Notation $k_0^2 = 2\mu V_0/\hbar^2, K^2 = 2\mu(V_0 + E)/\hbar^2, \kappa^2 = -2\mu E/\hbar^2$. Es sei $E < 0$. Begründen Sie die folgende Form für die Lösung der Radialgleichung (für beliebiges l)

$$R_{nl}(r) = \begin{cases} A_{nl}j_l(K_{nl}r) & r \leq R \\ B_{nl}H_l^{(+)}(i\kappa_{nl}r) & r > R \end{cases},$$

wobei $H_{nl}^{(\pm)}(\rho) = -n_l(\rho) \pm i j_l(\rho)$ und

$$j_l(\rho) = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right), \quad n_l(\rho) = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\cos \rho}{\rho} \right).$$

Gewinnen Sie (im Fall $l = 0$) durch Aufstellen der Anschlußbedingungen bei $r = R$ eine Bedingung für V_0 und R , die erfüllt sein muss, damit es N gebundene S -Zustände gibt.