Aufgabe 1: Bornsche Näherung für Yukawa-Potential

10 Punkte

Für eine in z -Richtung einlaufende Welle, die an einem Potential $V(\vec{r})$ gestreut wird, lautet die Wellenfunktion der stationären Streuzustände

$$\psi_k^+(\vec{r}) = e^{ikz} + \int d^3r' G_+(\vec{r} - \vec{r}') U(\vec{r}') \psi_k^+(\vec{r}')$$

mit

$$G_+(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad \text{und} \quad U(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}).$$

- a) Entwickeln Sie die Wellenfunktion für $r \gg r'$ und bestimmen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ in

$$\psi_k^+(\vec{r}) \stackrel{r \rightarrow \infty}{\sim} e^{ikz} + f(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Geben Sie anschließend die Bornsche Näherung für ψ_k^+ und $f(\theta, \varphi)$ an.

- b) Wir betrachten nun das Yukawa-Potential ($\alpha > 0$)

$$V(\vec{r}) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}.$$

Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \varphi)$ in der Bornschen Näherung. Geben Sie den differentiellen Streuquerschnitt $\sigma(\theta, \varphi) = |f(\theta, \varphi)|^2$ an.

Hinweis:

$$\int_0^\infty dr e^{-ar} \sin(br) = \frac{b}{a^2 + b^2} \quad (a, b > 0).$$

Aufgabe 2: Gestörter harmonischer Oszillator

10 Punkte

Wir betrachten einen harmonischen Oszillator mit Störterm $H = H_0 + \varepsilon W$ mit

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 X^2 \quad \text{und} \quad W = \frac{1}{2} m \omega^2 X^2,$$

wobei $\varepsilon \ll 1$.

- a) Entwickeln Sie die Eigenwertgleichung

$$H |n\rangle = E_n |n\rangle \tag{1}$$

in ε bis zur zweiten Ordnung, indem Sie die entwickelten Eigenwerte $E_n = E_n^{(0)} + \varepsilon E_n^{(1)} + \varepsilon^2 E_n^{(2)} + \dots$ und Zustände $|n\rangle = |n\rangle^{(0)} + \varepsilon |n\rangle^{(1)} + \dots$ einsetzen. Entwickeln Sie zusätzlich die Normierungsbedingung

$$\langle n|n\rangle = 1 \tag{2}$$

bis zur ersten Ordnung in ε .

(bitte wenden)

b) Zeigen Sie, dass wenn man Gleichung (1) zur ersten Ordnung in ε mit $|n\rangle^{(0)}$ projiziert, man

$$E_n^{(1)} = {}^{(0)}\langle n|W|n\rangle^{(0)} \quad (3)$$

und mit der Projektion mit $|q\rangle^{(0)} \neq |n\rangle^{(0)}$

$$|n\rangle^{(1)} = \sum_{q \neq n} |q\rangle^{(0)} \frac{{}^{(0)}\langle q|W|n\rangle^{(0)}}{E_n^{(0)} - E_q^{(0)}} \quad (4)$$

erhält (für Gleichung (4) muss man zusätzlich noch die Normierungsbedingung (2) verwenden). Analog kann man zur nächsten Ordnung vorgehen und bekommt (dies muss nicht gezeigt werden)

$$E_n^{(2)} = \sum_{q \neq n} \frac{|{}^{(0)}\langle q|W|n\rangle^{(0)}|^2}{E_n^{(0)} - E_q^{(0)}}. \quad (5)$$

Berechnen Sie den gestörten **Grundzustand** in erster und dessen Energieeigenwert in zweiter Ordnung.

c) Sie können das Problem auch exakt lösen. Geben Sie den Energieeigenwert für den Grundzustand an, entwickeln Sie diesen in $\varepsilon \ll 1$ und vergleichen das Ergebnis mit dem aus Aufgabenteil b).

Aufgabe 3: Gestörter harmonischer Oszillator: Advanced

(freiwillig)

Berechnen Sie den gestörten **Grundzustand** in zweiter und dessen Energieeigenwert in dritter Ordnung der zeitunabhängigen Störungsrechnung. Lösen Sie hierzu schrittweise die Eigenwertgleichung (1) für den Grundzustand in den Ordnungen in ε . Vergleichen Sie erneut den Energieeigenwert mit dem exakten Ergebnis.

Teilergebnis: Mit der Notation des gestörten Grundzustands $|0\rangle = |0\rangle^{(0)} + \varepsilon |0\rangle^{(1)} + \varepsilon^2 |0\rangle^{(2)} + \dots$ erhält man für die zweite Ordnung

$$|0\rangle^{(2)} = -\frac{1}{64} |0\rangle^{(0)} + \frac{\sqrt{2}}{16} |2\rangle^{(0)} + \frac{\sqrt{6}}{64} |4\rangle^{(0)}.$$