

Name:

Tutorium: Punkte:

Aufgabe 4: Hamiltonsche Mechanik

6 Punkte

Die Lagrangefunktion für ein Partikel der Masse m und Ladung e in einem vorgegebenen zeitunabhängigen elektromagnetischen Feld lautet:

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2}m \dot{\vec{x}} \cdot \dot{\vec{x}} + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{x}) \cdot \dot{\vec{x}} - e \Phi(\vec{x}).$$

- i) Bestimmen Sie den zu \vec{x} kanonisch konjugierten Impuls \vec{p} . (1 Punkt)
- ii) Bestimmen Sie mittels Legendretransformation die Hamiltonfunktion $H(\vec{p}, \vec{x})$. (1 Punkt)
- iii) Finden Sie – ausgehend von der Hamiltonfunktion – die Bewegungsgleichungen. Bringen Sie diese auf die Form $m \ddot{\vec{x}} = \vec{F}$, wobei \vec{F} durch die Felder \vec{E} , \vec{B} auszudrücken ist. (2 Punkte)
- iv) Die Poissonklammer $\{u, v\}$ zweier Funktionen $u(\vec{p}, \vec{x})$, $v(\vec{p}, \vec{x})$ ist definiert als

$$\{u, v\} \equiv \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial x_k}.$$

Schreiben Sie die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Poissonklammern $\{H, \vec{x}\}$ und $\{H, \vec{p}\}$. Berechnen Sie außerdem die Poissonklammer $\{x_k, p_j\}$. (2 Punkte)

Aufgabe 5: Fouriertransformation einer Gaußfunktion

6 Punkte

- i) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2/2)$.
 (Hinweis: Schreiben Sie das Quadrat des Integrals als zweidimensionales Integral und verwenden Sie Polarkoordinaten.)

(P.T.O.)

ii) Zeigen Sie, daß die Fouriertransformierte der Gaußfunktion $f(x) = \exp(-x^2/2)$ gegeben ist durch $\tilde{f}(k) = \exp(-k^2/2)$.

Hinweis: Finden Sie zunächst eine Differentialgleichung erster Ordnung und eine Anfangsbedingung, die $f(x)$ eindeutig bestimmen. Führen Sie dann eine Fouriertransformation für diese Gleichung und Bedingung durch.

iii) Berechnen Sie ausgehend von Teilaufgabe b) die Fouriertransformation der allgemeinen Gaußfunktion

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

indem Sie die in Aufgabe 3 definierten Operationen verwenden.

(Je 2 Punkte)