Moderne Theoretische Physik I (Theorie D) Blatt 3

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Ertl
Institut für Theoretische Physik
Abgabetermin: 13.05.13
SS 2013
Besprechung: 15.05.13

Name: ....

Tutorium: .... Punkte: ....

Aufgabe 6: *Semi-Klassische Quantisierung* 4 Punkte

Unter der Annahme, daß sich Elektronen aufgrund eines positiv geladenen Kerns (mit Ladung Ze) in kreisförmigen Bahnen in einem Coulomb Potential bewegen, finden Sie die erlaubten Energiewerte, unter Verwendung der semi-klassischen Quantisierungsbedingung:

$$\int p_i \, dq_i = n_i \, h \,,$$

wobei p_i, q_i der kanonisch konjugierte Impuls und Koordinate der Lagrange'schen- oder Hamilton'schen Mechanik ist; n_i sei eine ganze Zahl und h eine universelle Konstante. Die Integration geht über eine Periode der Teilchenbahn im Phasenraum.
Hinweis: Die Lagrange-Funktion in sphärischen Koordinaten (r, θ, φ) ist

$$\mathcal{L} = \frac{m\,\dot{r}^2}{2} + \frac{m\,r^2\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m\,r^2\,\dot{\varphi}^2\,\sin^2\theta}{2} + \frac{Z\,e^2}{r}\,.$$

Berechnen Sie zuerst die Bewegungsgleichungen (1 Punkte), benutzen Sie dann die Quantisierungsregel und lösen Sie nach dem Bohrradius und der Kreisfrequenz auf (2 Punkte). Zuletzt verwenden Sie Ihre Resultate um die Energie zu berechnen (1 Punkt).

Aufgabe 7: *Klassische Wellen in einer Dimension* 6 Punkte

Klassische Wellen in einer Dimension werden beschrieben durch die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0\,. \tag{a}$$

i) Wie lautet die allgemeine Lösung dieser Gleichung (Hinweis: Theorie C)? (1 Punkt)

ii) Beweisen Sie Ihre Aussage (Hinweis: Fourierdarstellung). Nutzen Sie dabei aus, daß eine Funktion $\tilde{\Psi}(q,\omega)$, welche die Zwangsbedingungen $q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ erfüllt, darstellbar ist als $\tilde{\Psi}(q,\omega) = \tilde{f}(\omega)\delta(q - \frac{\omega}{c}) + \tilde{g}(\omega)\delta(q + \frac{\omega}{c})$. (1 Punkt)

(P.T.O.)

iii) Bestimmen Sie die beiden freien Funktionen der allgmeinen Lösung so, daß die Anfangsbedingungen $\Psi(x,0) = \theta(1-x^2)$ und $\frac{\partial\Psi(x,t)}{\partial t}|_{t=0} = 0$ erfüllt sind. (2 Punkt)

iv) Skizzieren Sie die gefundenen Lösungen für die Zeiten $t = 0$, $ct < 1$, $ct = 1$ und $ct > 1$. (2 Punkte)

Aufgabe 8: *Wahrscheinlichkeiten* 2 Punkte

In der Milchstraße gibt es ca. $N = 10^{11}$ Sterne. Wir machen die folgenden frei erfundenen Annahmen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Stern einen Planeten hat, ist $p_1 = 0.01$. Die Wahrscheinlichkeit, daß auf einem Planeten lebensfreundliche Bedingungen herrschen, ist $p_2 = 0.01$. Die Wahrscheinlichkeit, daß sich auf einem lebensfreundlichen Planeten tatsächlich Leben entwickelt, ist $p_3 = 0.01$. Der Einfachheit halber nehmen wir weiter an, daß es keine Sonnensysteme mit mehr als einem Planeten gibt.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es in einem zufällig ausgewählten Sonnensystem Leben gibt?

ii) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es in der Milchstraße auf mindestens einem Planeten Leben gibt? (Hinweis: Betrachten Sie die negierte Aussage)

(Je 1 Punkt)