Moderne Theoretische Physik I (Theorie D) Blatt 5

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Ertl
Institut für Theoretische Physik Abgabetermin: 27.05.13
SS 2013 Besprechung: 29.05.13

Name: ....

Tutorium: .... Punkte: ....

Aufgabe 12: *Potentialtopf: gebundene Zustände* 8 Punkte

i) Wir betrachten wieder den Potentialtopf aus Aufgabe 11,

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 < 0 & \text{falls } 0 \leq x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

und zwar speziell den Fall $0 \geq E \geq -V_0$. In den Bereichen, in denen die Wellenzahl k_i imaginär wird, schreiben wird: $k_i = i\kappa_i$ $(\kappa_i \geq 0)$. Schreiben Sie die Wellenfunktion eines stationären Zustandes für die drei Bereiche konstanten Potentials nochmals mit diesen Bezeichnungen auf und nennen Sie die Anschlußbedingungen für die Wellenfunktion $\psi(x)$.
(1 Punkt)

ii) Divergente Wellenfunktionen sind nicht akzeptabel. Was muß daher für die Koeffizienten in der Wellenfunktion im Bereich $x > b$ gelten?

Bis auf Normierung und Phase liegt damit die Wellenfunktion im Bereich $x > b$ eindeutig fest. Finden Sie mit Hilfe der Transfermatrizen aus Aufgabe 11 i) die Form der Wellenfunktion im Bereich $x < 0$.
(2 Punkte)

iii) Welche zusätzliche Bedingung muß im Bereich $x < 0$ für eine physikalisch akzeptable Wellenfunktion gelten? Leiten Sie hieraus eine Bedingung für die erlaubten Energiewerte her. Bringen Sie die Bedingung auf die Form:

$$k_2 \sim \cos(k_2 b/2) \text{ oder } k_2 \sim \sin(k_2 b/2)\,,$$

wobei k_2 die Wellenzahl im Bereich des Potentialtopfes ist.
(3 Punkte)

iv) Wieviele gebundene Zustände gibt es in Abhängigkeit von der Breite und Tiefe des Potentialtopfes? Berechnen Sie die Grundzustandsenergie unter Verwendung der groben Näherung $\cos x \approx 1 - (\frac{2x}{\pi})^2$.
(2 Punkt)

(P.T.O.)

Aufgabe 13: *Potentialtopf mit Wänden unterschiedlicher Höhe* 2 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen im Potential

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & x < 0, \\ 0, & 0 < x < a, \\ V_2 & x > a, \end{cases}$$

wobei $(V_1 > V_2 > 0)$. Zeigen Sie, daß wenn $\sqrt{2ma^2V_2/\hbar^2} \geq \arctan\sqrt{(V_1 - V_2)/V_2}$ gilt, das Energiespektrum für dieses Teilchen diskrete Energieniveaus im Potentialtopf besitzt.

Aufgabe 14: *Gaußverteilung* 2 Punkte

Gegeben sei die Gaußverteilung

$$f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,.$$

Zeigen Sie:

i) $\langle x\rangle = \mu$ (2 Punkte)

ii) $\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle = \sigma^2$ (2 Punkte)

Hinweis: $\phi(x)$ sei die Wahrscheinlichkeitsverteilung für eine Zufallsvariable X. Es muß gelten: $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\phi(x) = 1$. Die Wahrscheinlichkeit, für X einen Wert zwischen x_1 und x_2 zu finden, ist

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x\,\phi(x)\,.$$

Ist $g(X)$ eine Funktion der Zufallsvariablen X, so ist der Erwartungswert von $g(X)$ definiert als

$$\langle g(X)\rangle = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,g(x)\,\phi(x)\,.$$

Wir unterscheiden hier und in allen weiteren Aufgaben nicht sauber zwischen X und x.