Moderne Theoretische Physik I (Theorie D) Blatt 6

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Ertl
Institut für Theoretische Physik
Abgabetermin: 03.06.13
SS 2013
Besprechung: 05.06.13

Name: ....

Tutorium: .... Punkte: ....

Aufgabe 15: *Potentialtopf: Resonanzstreuung eines Wellenpaketes* 7 Punkte

Diese Aufgabe schließt direkt an Aufgabe 11 ii) an.

i) Berechnen Sie die Phasenverschiebung $\delta(k)$ zwischen der von links einlaufenden und der nach rechts auslaufenden Welle. (2 Punkte)

ii) Eine Resonanz liegt vor, wenn der Transmissionskoeffizient maximal wird. In der Nähe einer Resonanz schreiben wir $k^2 = 2m(E_R + \epsilon)/\hbar^2$, wobei E_R die Resonanzenergie ist. Zeigen Sie, daß die Streuphase δ für kleine ϵ die Form

$$\delta \approx -kb - \arctan\left(\frac{2}{\Gamma}\,\epsilon\right) + \text{const}$$

hat und bestimmen Sie die Konstante Γ. (2 Punkte)

iii) Bauen Sie aus den stationären Streuzuständen ein Wellenpaket zusammen:

$$\psi(x,t) = \int \mathrm{d}k\, g(k)\, \phi_k(x)\, \mathrm{e}^{-iEt/\hbar},$$

wobei $\phi_k(x)$ die stationären Streuzustände aus Aufgabe 11 ii) sind. $g(k)$ habe ein Maximum für $E(k) \equiv \hbar^2 k^2/(2m) = E_R$. Das Maximum von $\psi(x,t)$ befindet sich ungefähr dort, wo die Streuzustände konstruktiv interferieren. Dies ist dort der Fall, wo die Phase bezüglich k stationär ist. Finden Sie so den Ort des Maximums von $\psi(x,t)$ für den einlaufenden und den auslaufenden Anteil. (2 Punkte)

iv) Skizzieren Sie die Trajektorie des Maximums in einem x–t–Diagramm für den Fall einer scharfen Resonanz (Γ klein). Zeichnen Sie zum Vergleich die Trajektorie eines klassischen Teilchens ein. (1 Punkt)

(P.T.O.)

Aufgabe 16: *Unschärfe eines Gaußschen Wellenpaketes* 4 Punkte

Gegeben Sei folgendes Gaußsche Wellenpaket

$$\psi(x,t) = N(t)\,\mathrm{e}^{i\,\phi(x,t)}\,\exp\left[-\frac{(x-x_0(t))^2}{4\sigma(t)^2}\right],$$

wobei

$$N(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\left(\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2}\,t^2\right)^{1/4}}, \qquad \sigma(t)^2 = \frac{\alpha^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2}\,t^2}{\alpha},$$

$$x_0(t) = \frac{\hbar k_0}{m}\,t, \qquad \phi(x,t) = k_0 x - \omega_0 t - \frac{\theta(t)}{2} + \frac{\frac{\hbar}{2m}\,t\,\left(x - x_0(t)\right)^2}{4\alpha\,\sigma(t)^2},$$

$$\theta(t) = \arctan\frac{\hbar\,t}{2m\alpha} \qquad \omega_0 = \frac{\hbar\,k_0^2}{2m}.$$

i) Berechnen Sie $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\,\psi^*(x,t)\,\psi(x,t)$. (1 Punkt)

ii) Berechnen Sie für alle Zeiten t die Orts- und Impulsunschärfen

$$\Delta x = \sqrt{\langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle}, \qquad \Delta p = \sqrt{\langle (p - \langle p\rangle)^2\rangle}$$

sowie das Unschärfeprodukt $\Delta x\,\Delta p$.
Hinweis: Die Wellenfunktion für ein freies Teilchen mit Masse m ist gegeben durch

$$\psi(x,t) = \int_{\mathbb{R}} dk\, e^{-\alpha(k-k_0)^2} e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} e^{ikx}.$$

(3 Punkte)

Aufgabe 17: *Unschärferelation* 1 Punkte

Zeigen Sie unter Verwendung der Unschärferelation für Ort und Impuls, daß die kinetische Energie eines Teilchens in einer Dimension folgendermaßen nach unten beschränkt ist:

$$\langle H_{\mathsf{kin}}\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m\langle x^2\rangle}$$

Bemerkung: Diese Relation erklärt die Stabilität des Wasserstoffatoms: Das Potential ist zwar nach unten unbeschränkt, doch die kinetische Energie nimmt mit abnehmendem Radius stark zu.