Name:

Tutorium: Punkte:

Aufgabe 22: Vollständigkeit

3 Punkte

Betrachten Sie den von den Funktionen $1, \sin x, \sin^2 x, \cos^2 x, \sin 2x, \cos 2x$ aufgespannten Vektorraum (der Definitionsbereich der Funktionen sei $[0, 2\pi]$). Bestimmen Sie die Dimension des Raumes. Geben Sie eine Basis an und zeigen Sie deren Vollständigkeit und lineare Unabhängigkeit.

Aufgabe 23: Orthogonale Polynome

6 Punkte

Der Raum der Polynome über dem Intervall $[a, b]$ wird aufgespannt von der Menge

$$B := \{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\}.$$

Durch

$$\langle p_1 | p_2 \rangle := \int_a^b dx g(x) p_1(x) p_2(x),$$

$g(x) \geq 0$ und stetig, sei ein Skalarprodukt gegeben (p_1, p_2 sind Polynome). Mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens kann man ausgehend von B ein System von orthogonalen Polynomen konstruieren.

- i) Wir betrachten den Fall $a = -1, b = 1, g(x) = 1$. Bestimmen Sie ausgehend von der Basis B die ersten 3 orthogonalen Polynome P_0, P_1, P_2 (der Grad in x ist ≤ 2). Bestimmen Sie auch die Norm $\|P_k\| = \sqrt{\langle P_k | P_k \rangle}$ ($k = 0 \dots 2$).
- ii) Wir betrachten ein zweites Beispiel: $a = 0, b = \infty, g(x) = e^{-x}$. Bestimmen Sie wieder die ersten 3 orthogonalen Polynome L_0, L_1, L_2 sowie deren Norm.

Aufgabe 24: Eigenwerte einer Matrix

3 Punkte

Gegeben sei die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ist B hermitesch? Sind die Eigenwerte reell? Bilden die Eigenvektoren eine Basis?