Moderne Theoretische Physik I (Theorie D) Blatt 10

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Ertl
Institut für Theoretische Physik
SS 2013

Abgabetermin: 01.07.13
Besprechung: 03.07.13

Name: ....

Tutorium: .... Punkte: ....

Aufgabe 29: *Freier Fall und springender Ball* 5 Punkte

Der Hamiltonoperator für ein Teilchen der Masse m in einem homogenen Kraftfeld in einer Dimension lautet:

$$H = p^2/(2m) - Fx\,.$$

i) Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung.
(2 Punkte)

ii) Finden Sie durch Fouriertransformation die Wellenfunktion im Ortsraum. Stellen Sie diese durch die Airyfunktion dar.
(2 Punkte)

iii) Wir fügen nun eine undurchdringliche Wand bei $x = 0$ hinzu. Es muß also gelten: $\psi(x) = 0$ für $x \leq 0$. Die erste Ableitung ψ' braucht bei $x = 0$ nicht stetig zu sein. Finden Sie die niedrigsten drei Energieeigenwerte.
(1 Punkte)

Die Airy-Funktion Ai(x) ist definiert als

$$\mathrm{Ai}(x) \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\cos\left(t^3/3 + xt\right)\,.$$

Die ersten Nullstellen von Ai(x) liegen bei -2.33811, -4.08795, -5.52056, -6.7867144, -7.94413, -9.02265.
Die Airy Funktion wurde 1838 von dem britischen Astronomen George Biddell Airy eingeführt, um die Intensitätsverteilung des Lichts in einem Regenbogen zu beschreiben.

(P.T.O.)

Aufgabe 30: *Drehimpuls* 7 Punkte

Die Vertauschungsrelationen für die quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren J_1, J_2, J_3 lauten: $[J_i, J_k] = i\hbar \sum_l \epsilon_{ikl} J_l$. Wir definieren $\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$, $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$. Es gelten die folgenden Eigenschaften:

$$[\vec{J}^2, J_k] = 0 \qquad (1) \qquad\qquad J_\pm^\dagger = J_\mp \qquad (2)$$

$$[J_3, J_\pm] = \pm\hbar\, J_\pm \qquad (3) \qquad\qquad [J_+, J_-] = 2\hbar\, J_3 \qquad (4)$$

$$\vec{J}^2 - J_3^2 = \frac{1}{2}\left(J_+ J_+^\dagger + J_+^\dagger J_+\right) \qquad (5) \qquad\qquad J_- J_+ = \vec{J}^2 - J_3^2 - \hbar J_3 \qquad (6)$$

$$J_+ J_- = \vec{J}^2 - J_3^2 + \hbar J_3 \qquad (7)$$

i) Beweisen Sie die Gleichungen (3), (4) und (6). (3 Punkte)

ii) Da $\vec{J}^2$ mit J_3 vertauscht, gibt es gemeinsame Eigenzustände $\psi_{j,m}$. Weiter kann $\vec{J}^2$ keine negativen Eigenwerte haben. Daher können wir schreiben:

$$\vec{J}^2 \psi_{j,m} = \hbar^2\, j(j+1)\, \psi_{j,m}\,, \qquad J_3 \psi_{j,m} = m\hbar\, \psi_{j,m}$$

mit $j \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$, $j \geq 0$. Zeigen Sie: $J_\pm \psi_{j,m}$ ist entweder null oder wieder ein Eigenzustand zu $\vec{J}^2$ und J_3. Was sind die Eigenwerte? (1 Punkt)

iii) Verwenden Sie Gleichung (5) um zu zeigen, daß es ein m_{max} und ein m_{min} gibt mit $J_+ \psi_{j,m_{\mathsf{max}}} = 0$ und $J_- \psi_{j,m_{\mathsf{min}}} = 0$. Verwenden Sie dann die Gleichungen (6), (7) um zu zeigen, daß $m_{\mathsf{max}} = -m_{\mathsf{min}} = j$. Begründen Sie, daß j ganz- oder halbzahlig sein muß. (3 Punkte)