Moderne Theoretische Physik I (Theorie D) Blatt 11

Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Ertl
Institut für Theoretische Physik
Abgabetermin: 08.07.13
SS 2013
Besprechung: 10.07.13

Name: ....

Tutorium: .... Punkte: ....

Aufgabe 31: *Kugelflächenfunktionen* 6 Punkte

Die assoziierten Legendrepolynome sind definiert als:

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l\, l!}\,(1-x^2)^{m/2}\,\frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}}(x^2-1)^l\,,$$

mit $x \in [-1,1]$, $l \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$, $|m| \le l$ und erfüllen die Differentialgleichung

$$(1-x)^2\, P_l^{m\prime\prime} - 2x\, P_l^{m\prime} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) P_l^m = 0\,.$$

Die Kugelflächenfunktionen sind gegeben durch

$$Y_l^m(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\,\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\,\mathrm{e}^{im\phi}\,.$$

i) Zeigen Sie, daß die Kugelflächenfunktionen als Funktionen auf der Kugel stetig sind.

ii) Der Bahndrehimpulsoperator lautet in Kugelkoordinaten:

$$L_x = i\hbar\left[\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$
$$L_y = i\hbar\left[-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right]$$
$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}\,.$$

Berechnen Sie $\vec{L}^2$ und zeigen Sie, daß $\Delta = -\vec{L}^2/(r^2\hbar^2) + (1/r^2)\partial_r(r^2\partial_r)$, wobei Δ der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten ist.

iii) Zeigen Sie, daß die Kugelflächenfunktionen Y_l^m gemeinsame Eigenfunktionen zu den Operatoren L_z und $\vec{L}^2$ sind und bestimmen Sie die Eigenwerte.

(je 2 Punkte)

(P.T.O.)

Aufgabe 32: *Hermite'sche Polynome* 2 Punkte

Betrachten Sie die Hermite'schen Polynome

$$H_n(z) = (-1)^n \, e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

i) Zeigen Sie, daß die Funktion e^{-t^2+2zt} die erzeugende Funktion für Hermite'sche Polynome ist, d.h., daß

$$e^{-t^2+2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z)$$

gilt. (Hinweis: Verwenden Sie die Taylor-Entwicklung für $e^{-(z-t)^2}$.) (1 Punkt)

ii) Beweisen Sie die folgende Rekursionsrelation für H_n:

$$\frac{d}{dz} H_n(z) = 2n H_{n-1}(z)$$

(1 Punkt)

iii) Bonus-Aufgabe (2 Punkte): Beweisen Sie die folgende Rekursionsrelation für H_n:

$$H_n(z) = 2z H_{n-1}(z) - 2(n-1) H_{n-2}(z)$$

und leiten Sie daraus die Differentialgleichung für Hermite'sche Polynome her

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + 2n \right] H_n(z) = 0$$

Aufgabe 33: *Kugelförmiger Potentialtopf* 4 Punkte

Wir betrachten das Potential

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{falls } |\vec{x}| < R \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

i) Lösen Sie die Radialgleichung für den Drehimpuls $l = 0$ und finden Sie die Grundzustandsenergie. (1 Punkt)

ii) Lösen Sie unter Verwendung der sphärischen Besselfunktionen $j_k(x)$, $n_k(x)$ die Radialgleichung für $l > 0$. Definition und Eigenschaften dieser Funktionen finden Sie z.B. unter `http://mathworld.wolfram.com/SphericalBesselFunction.html`. Die ersten Nullstellen der sphärischen Besselfunktionen erster Art sind:

$j_0(x)$:	3.14	6.28	9.42
$j_1(x)$:	4.49	7.73	10.90
$j_2(x)$:	5.76	9.10	12.32

(2 Punkte)

iii) Vergleichen Sie die Entartung der Energieniveaus qualitativ mit dem Coulombpotential. (1 Punkt)