Prof. Dr. F.R. Klinkhamer; Dr. S. Ertl
Institut für Theoretische Physik
SS 2013

Abgabetermin: 15.07.13
Besprechung: 19.07.13

Name: ....

Tutorium: .... Punkte: ....

Aufgabe 37: *Kohärente Zustände eines harmonischen Oszillators* 12 Punkte

Formeln für die Auf- und Absteigeoperatoren:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(a + a^\dagger) \qquad p = -i\sqrt{m\hbar\omega/2}\,(a - a^\dagger)$$

$$[a, a^\dagger] = 1 \qquad H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)$$

$$N = a^\dagger a \qquad N\psi_n = n\psi_n$$

$$a\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1} \qquad a^\dagger\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}$$

i) Zeigen Sie, daß Eigenzustände des Absteigeoperators a minimale Orts-Impuls-Unschärfe haben. Diese Zustände nennt man *kohärent*. Verwenden Sie zur Berechnung der Orts- und Impulsunschärfe die Auf- und Absteigeoperatoren.
(4 Punkte)

ii) Bestimmen die normierten kohärenten Zustände explizit in der Besetzungszahl-Darstellung, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten c_n in

$$\phi_\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,\psi_n\,, \qquad \text{mit } a\phi_\alpha = \alpha\phi_\alpha\,, \quad ||\phi_\alpha|| = 1\,.$$

(3 Punkte)

iii) Schreiben Sie die normierten kohärenten Zustände ϕ_α zum a-Eigenwert α in der Form

$$\phi_\alpha = f(\alpha, a^\dagger)\psi_0$$

(2 Punkte)

(P.T.O.)

iv) Ein harmonischer Oszillator befinde sich zur Zeit $t = 0$ in einem kohärenten Zustand mit a-Eigenwert α_0.

Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Zustands. Zeigen Sie insbesondere, daß der Zustand kohärent bleibt.
(1 Punkt)

v) Angenommen, wir haben einen Detektor, der ein Signal ausgibt falls die Energie des Oszillators kleiner ist als $2\hbar\omega$. Mit diesem führen wir zur Zeit $t_1 > 0$ eine Messung an dem in der vorigen Teilaufgabe beschriebenen System aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schlägt der Detektor an? Bestimmen Sie den Zustand des Systems für Zeiten $t > t_1$ in Abhängigkeit des Messergebnisses zur Zeit t_1.
(2 Punkte)

[Kohärente Zustände nennt man auch *Glauber-Zustände*. Roy Glauber erhielt unter anderem dafür 2005 den Nobelpreis.]