

## Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön  
Andreas Heimes, Dr. Andreas PoenickeLösungen zu Blatt 1  
23.04.2014

## 1. Photoelektrischer Effekt und Gegenfeldmethode (2 Punkte)

- (a) (1 Punkt) Der Zusammenhang zwischen kinetischer Energie der Elektronen, Austrittsarbeit und Energie der Photonen ist gegeben durch

$$E_{kin} = hf - \Phi$$

- (b) (1 Punkt) Die Elektronen durchlaufen eine Spannung
- $eU$
- . Stellt man die Spannung entsprechend ein, so dass der Strom durch den Amperemeter gerade verschwindet, entspricht die kinetische Energie der Elektronen gerade

$$E_{kin} = eU.$$

Wir erhalten entsprechend den Zusammenhang

$$h = \frac{e(U_1 - U_2)}{f_1 - f_2} = \frac{0,42eV}{10^{14}Hz} = (0,42 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}J)10^{-14}s = 6,73 \cdot 10^{-34} Js.$$

Der Literaturwert wäre  $h = 6.62606957(29) \cdot 10^{-34} Js$ .

## 2. Delta-Funktion (2 Punkte)

- (1 Punkt) Zunächst zeigen wir die Normierung der Delta-Folgen (a)-(c).

- (a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\epsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\epsilon}} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-x^2} e^{-y^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( -\pi e^{-r^2} \Big|_{r=0}^{\infty} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

- (b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{1 + y^2} = \frac{1}{\pi} \text{atan}(y) \Big|_{y=-\infty}^{\infty} = 1$$

- (c)

$$\int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} dx \frac{1}{\epsilon} = 1$$

- (1 Punkt) Es reicht weiterhin zu zeigen, dass
- $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int dx \delta_{\epsilon}(x) f(x) = f(0)$
- .

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_{\epsilon}(x) f(x) = \int_{\lambda_{\epsilon}}^{\infty} dx \delta_{\epsilon}(x) f(x) + \int_{-\lambda_{\epsilon}}^{-\lambda_{\epsilon}} dx \delta_{\epsilon}(x) f(x) + \int_{-\lambda_{\epsilon}}^{\lambda_{\epsilon}} dx \delta_{\epsilon}(x) f(x)$$

Für jede der Dirac-Folgen (a)-(c) finden wir eine Nullfolge  $\lambda_\epsilon \rightarrow 0$  für  $\epsilon \rightarrow 0$ , so dass  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\lambda_\epsilon}^{\lambda_\epsilon} \delta_\epsilon(x) = 1$ . Der Mittelwertsatz der Integralrechnung liefert dann

$$f(\xi_1^\epsilon) \int_{\lambda_\epsilon}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) + f(\xi_2^\epsilon) \int_{-\infty}^{-\lambda_\epsilon} dx \delta_\epsilon(x) + f(\xi_3^\epsilon) \int_{-\lambda_\epsilon}^{\lambda_\epsilon} dx \delta_\epsilon(x)$$

mit  $\xi_1^\epsilon \in (\lambda_\epsilon, \infty)$ ,  $\xi_2^\epsilon \in (-\infty, -\lambda_\epsilon)$ ,  $\xi_3^\epsilon \in [-\lambda_\epsilon, \lambda_\epsilon]$ . Insbesondere gilt für  $f(x) = 1$ , nach Voraussetzung, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\lambda_\epsilon}^{\lambda_\epsilon} \delta_\epsilon(x) = 1 \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\lambda_\epsilon}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\lambda_\epsilon} dx \delta_\epsilon(x) = 0$$

und damit

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta_\epsilon(x) f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\xi_3^\epsilon) \int_{-\lambda_\epsilon}^{\lambda_\epsilon} dx \delta_\epsilon(x) = f(0)$$

Alternativ können wir diesen Zusammenhang explizit für die jeweiligen Dirac-Folge zeigen, z.B. für den Lorentz:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + y^2} f(\epsilon y) = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + y^2} = f(0).$$

### 3. Eindimensionale Barriere (6+2 Punkte)

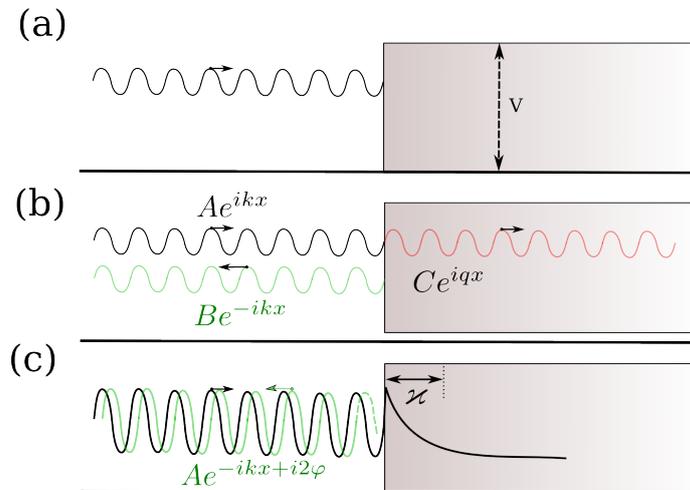


Abbildung 1: 1D – Barriere

Gegeben sei die eindimensionale Schrödingergleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x, t) \quad (1)$$

mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ V & , x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Weiter sei  $V$  reel und positiv.

(a) (2 Punkte) *Stetigkeitsbedingungen:*

Wir machen den Ansatz  $\psi(x, t) = \phi(x)e^{-i\omega t}$  und erhalten

$$\hbar\omega\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\phi(x)}{\partial x^2} + V(x)\phi(x) \quad (3)$$

Die Integration von (3) über den Intervall  $I_\epsilon = (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$  liefert

$$\int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx \hbar\omega\phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial\phi(x)}{\partial x} \Big|_{x=x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} + \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx V(x)\phi(x).$$

Sind sowohl  $\phi(x)$  als auch  $V(x)$  beschränkt im Intervall  $I_\epsilon$ , so können wir die Integrale nach oben abschätzen,

$$\left| \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx \hbar\omega\phi(x) \right| < 2\epsilon\hbar\omega \max_{x \in I_\epsilon} |\phi(x)|$$

$$\left| \int_{x_0-\epsilon}^{x_0+\epsilon} dx V(x)\phi(x) \right| < 2\epsilon \max_{x \in I_\epsilon} |V(x)\phi(x)|$$

Im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$  gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon\hbar\omega \max_{x \in I_\epsilon} |\phi(x)| = 0$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2\epsilon \max_{x \in I_\epsilon} |V(x)\phi(x)| = 0$$

Damit erhalten wir die Stetigkeit der Ableitungen

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial\phi(x_0 + \epsilon)}{\partial x} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial\phi(x_0 - \epsilon)}{\partial x}$$

Aus der Stetigkeit der Ableitung in jedem Punkt  $x_0$  folgt direkt auch die Stetigkeit der Funktion  $\phi(x)$ .

(b) (2 Punkte) *Wellenfunktion für  $\hbar\omega > V$ :*

Durch Einsetzen des Ansatzes

$$\phi(x) = \begin{cases} A e^{ikx} + B e^{-ikx} & x < 0 \\ C e^{iqx} & x \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

in (3) finden wir

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Leftrightarrow \hbar k = \sqrt{2m\hbar\omega}$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 q^2}{2m} + V \Leftrightarrow \hbar q = \sqrt{2m(\hbar\omega - V)}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(-\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi(\epsilon)$  und  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial\phi(-\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \partial\phi(\epsilon)$  folgen die Beziehungen

$$A + B = C$$

$$k(A - B) = qC$$

und damit

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - q}{k + q}$$

$$t = \frac{C}{A} = \frac{2k}{k + q}$$

Die Stromdichte ergibt sich aus

$$\begin{aligned} j(x, t) &= \frac{\hbar}{2mi} (\psi^*(x, t) \partial_x \psi(x, t) - \psi(x, t) \partial_x \psi^*(x, t)) \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\hbar}{mi} \psi^*(x, t) \partial_x \psi(x, t) \right] = \operatorname{Re} \left[ \frac{\hbar}{mi} \phi^*(x) \partial_x \phi(x) \right] \end{aligned}$$

Durch einsetzen von (4) finden wir

$$\begin{aligned} j_L(x, t) &= \frac{\hbar k}{m} (|A|^2 - |B|^2) = \frac{\hbar k}{m} |A|^2 \left( \frac{(k+q)^2}{(k+q)^2} - \frac{(k-q)^2}{(k+q)^2} \right) = \frac{\hbar |A|^2}{m} \frac{4k^2 q}{(k+q)^2} \\ j_R(x, t) &= \frac{\hbar q}{m} |C|^2 = \frac{\hbar |A|^2}{m} \frac{4k^2 q}{(k+q)^2} \end{aligned}$$

Damit wäre die Stromerhaltung  $j_L = j_R$  gezeigt.

- (c) (2 Punkte) *Wellenfunktion für  $\hbar\omega < V$ :*

Da nun  $\hbar\omega < V$  ist, finden wir  $q = i\sqrt{2m(V - \hbar\omega)}$  und somit  $\varkappa = \sqrt{2m(V - \hbar\omega)}$ . Die entsprechende rechtsseitige Wellenfunktion ist also gegeben durch

$$\phi(x) = C e^{-\varkappa x}.$$

Wir finden also eine exponentiell unterdrückte Aufenthaltswahrscheinlichkeit im klassisch verbotenen Bereich. Die charakteristische Eindringtiefe ist gegeben durch  $\Delta x \sim 1/\varkappa$ . Der Reflektionskoeffizient ist nun gegeben durch

$$r = \frac{B}{A} = \frac{k - i\varkappa}{k + i\varkappa} = \frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}} = e^{i2\varphi}$$

mit  $\tan(\varphi) = -\frac{\varkappa}{k}$ . Zunächst stellen wir fest, dass  $|A|^2 = |B|^2$ , die Welle wird also totalreflektiert. Desweiteren erhält die reflektierte Welle gegenüber der Einfallenden eine zusätzliche Phasenverschiebung, wie in Abb. 1(c) angedeutet. Wir finden

$$\varphi = -\operatorname{atan} \left( \frac{\sqrt{1 - \hbar\omega/V}}{\sqrt{\hbar\omega/V}} \right)$$

Wie wir Abb. 2(a) entnehmen können, variiert  $\varphi$  zwischen  $-\pi/2$  für  $\hbar\omega \rightarrow 0$  und 0 für  $\hbar\omega \rightarrow V$ . Die beiden Grenzfälle entsprechen in der klassischen Mechanik jeweils der Reflexion einer ebenen Welle an einem festen oder losen Ende (siehe Abb. 2 (b)). Dort geht die Reflexion an einem festen Ende auch mit einer Phasenverschiebung von  $\pi$  einher.

- (d) (2 Punkte) **Bonus-Aufgabe:** *Totalreflektiertes Wellenpaket*

Wir betrachten das reflektierte Wellenpaket

$$\psi_{\text{ref}}(x, t) = \int dk g(k) e^{i[-\omega(k)t - kx + 2\varphi(k)]}. \quad (5)$$

Der Integrand liefert den größten Beitrag in dem Bereich, in dem der Phasenfaktor  $\theta(k) = -\omega(k)t - kx + 2\varphi(k)$  stationär ist. Aufgrund der speziellen Form von  $g(k)$  entwickeln wir diesen in linearer Ordnung in  $k - k_0$ ,

$$-\omega(k)t - kx + 2\varphi(k) = -\omega_0 t - k_0 x + \varphi_0 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} t - x + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial k} \right) \Big|_{k=k_0} (k - k_0) + \dots$$

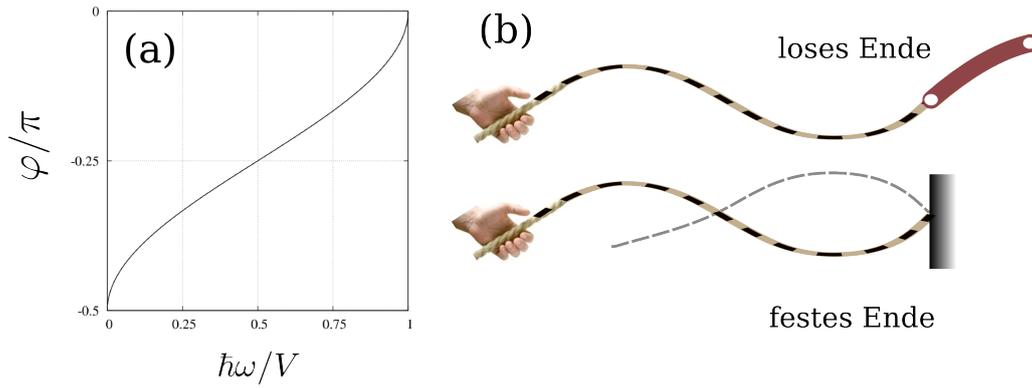


Abbildung 2: Totalreflektion

Wir betrachten die Zeitverzögerung an der Barriere. Für  $x = 0$  verschwindet die Klammer, falls

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0} \Delta t = 2 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial k} \right|_{k=k_0}$$

Hierbei ist  $v_g = \partial \omega / \partial k|_{k=k_0}$  die Gruppengeschwindigkeit des Wellenpakets und

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \varphi}{\partial k} \right|_{k=k_0} &= - \left. \frac{\partial}{\partial k} \operatorname{atan} \left( \frac{\varkappa}{k} \right) \right|_{k=k_0} \\ &= - \left. \frac{k^2}{k^2 + \varkappa^2} \left( \frac{\partial_k \varkappa}{k} - \frac{\varkappa}{k^2} \right) \right|_{k=k_0} \\ &= - \left. \frac{k^2}{k^2 + \varkappa^2} \left( - \frac{1}{\varkappa} - \frac{\varkappa}{k^2} \right) \right|_{k=k_0} \\ &= \left. \frac{1}{\varkappa} \right|_{k=k_0} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Delta t = 2 \left. \frac{1}{v_g \varkappa} \right|_{k=k_0} \quad (6)$$

Dieses Ergebnis ist einleuchtend: Die Welle dringt  $\Delta x \sim 1/\varkappa$  tief in die klassisch verbotene Region ein und hat eine Gruppengeschwindigkeit  $v_g$ . Für den Hin- und Rückweg der Länge  $2\Delta x$  benötigt die Welle also die Zeit  $\Delta t = 2\Delta x/v_g = 2/\varkappa v_g$ .