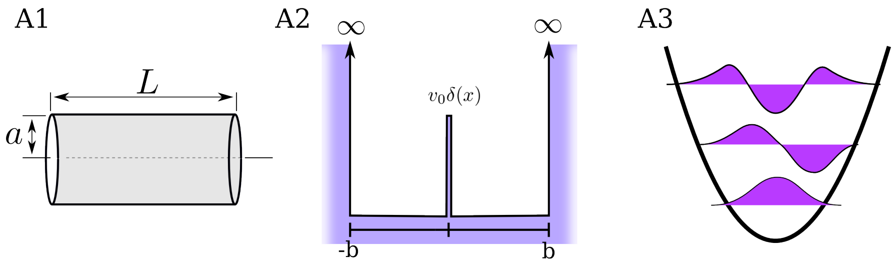
Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 3
Besprechung 14.05.2014



1. Teilchen im Zylinder (3 Punkte)

Ein Teilchen befinde sich in einem dreidimensionalen Potenzial (Abb. A1)

$$V(r,\varphi,z) = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a \text{ und } 0 \leq z < L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Schrödinger-Gleichung in Zylinderkoordinaten ist gegeben durch

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\partial_r\Big(r\partial_r\psi\Big) + \frac{1}{r^2}\partial_\phi^2\psi + \partial_z^2\psi\right] + V\psi = E\psi.$$

Lösen Sie diese mit dem Ansatz $\psi(r,\varphi,z) = A\exp(in\varphi)\sin(k_z z)R(r)$:

(a) (1 Punkt) Welche Bedingungen erfüllen n und k_z?

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $R(r) = J_n(kr)$ mit $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2} - k_z^2}$, wobei J_n die Besselfunktion erster Gattung ist. Welche Beziehung erhalten Sie für die Energiequantisierung?

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass im Limes $a \ll L$ für die niedrigsten Energieniveaus gilt, dass $E_l = \frac{\hbar^2\gamma^2}{2ma^2} + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}l^2$, wobei $l = 1, 2, 3, ...$ und γ die erste Nullstelle von $J_0(x)$ ist.

2. Doppelmuldenpotenzial (4 Punkte)

In dieser Aufgabe diskutieren wir das Doppelmuldenpotenzial in der Abbildung A2,

$$V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ v_0\delta(x) & |x| \leq b \end{cases}$$

mit $v_0 > 0$.

(a) (1 Punkt) Sei g eine beliebige ortsabhängige Funktion und der Paritätsoperator P ist definiert durch

$$Pg(x) = g(-x)$$
$$P^2 g(x) = g(x).$$

Zeigen Sie:

(i) Wenn $H(-x) = H(x)$ und $\psi(x)$ die Schrödinger-Gleichung löst, so ist auch $P\psi(x)$ eine Lösung.

(ii) Die Eigenfunktionen von P sind entweder symmetrisch oder anti-symmetrisch bezüglich des Ursprungs, d.h. $\psi_{s/a}(-x) = \pm\psi_{s/a}$

(b) (1 Punkt) Machen Sie einen geeigneten Ansatz für $\psi_{s/a}$, welcher die Anschlussbedingungen bei $|x| = 0$ und $|x| = b$ erfüllt und zeigen Sie, dass Sie für die Energiequantisierung im symmetrischen bzw. anti-symmetrischen Fall erhalten

$$\frac{1}{k}\tan(bk) = -\frac{\hbar^2}{mv_0} \qquad \text{bzw.} \qquad \sin\big(kb\big) = 0 \tag{1}$$

mit $\hbar k = \sqrt{2mE}$.

(c) (1 Punkt) Diskutieren Sie den Fall $v_0 \gg \frac{\hbar^2}{mb}$ und bestimmen Sie approximativ die Energieaufspaltung $\Delta E = E_2 - E_1$ der beiden energetisch niedrigsten Zustände ψ_1 und ψ_2. Zeigen Sie, dass näherungsweise gilt

$$\Delta E = \frac{\hbar^4\pi^2}{m^2b^3v_0}.$$

[Hinweis: Betrachten Sie die Taylorentwicklung von $\tan(x)$ um $x = \pi$.]

(d) (1 Punkt) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei ein Zustand ψ als Superposition der Eigen-Zustände ψ_1 und ψ_2 aus (c) initialisiert,

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\psi_1(x, t = 0) + \psi_2(x, t = 0)\big)$$

Diskutieren sie qualitativ das zeitliche Verhalten von $|\psi(x, t)|^2$ für $t > 0$, indem Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung lösen.

3. Hermite'sche Polynome (3 Punkte)

In der Vorlesung wird die Herleitung der Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators besprochen. Diese in Abbildung 3 skizzierten Eigenfunktionen stehen in engem Zusammenhang zu den Hermite'schen Polynomen

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2}\partial_z^n e^{-z^2}, \qquad n \geq 0$$

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion e^{-t^2+2zt} die erzeugende Funktion der Hermite'schen Polynome ist, d.h.

$$e^{-t^2+2zt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}H_n(z). \tag{2}$$

[Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung von $e^{-(z-t)^2}$ um $t = 0$.]

(b) (1 Punkt) Leiten Sie mit Hilfe von (2) die folgenden Rekursionsrelationen für H_n her:

$$\partial_z H_n(z) = 2n\, H_{n-1}(z), \qquad n \geq 1 \tag{3}$$

und

$$H_{n+1}(z) = 2z\, H_n(z) - 2nH_{n-1}(z), \qquad n \geq 1 \tag{4}$$

Leiten Sie mit Hilfe von Gl.(3) und (4) die Differenzialgleichung

$$\big[\partial_z^2 - 2z\partial_z + 2n\big]H_n(z) = 0 \tag{5}$$

her.

[Hinweis: Gl.(3) und (4) kann man beweisen, indem man Gl.(2) nach z bzw. nach t ableitet.]

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie die Orthogonalität der Hermite'schen Polynome,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2}H_n(z)H_m(z) = 0, \qquad \text{für } n \neq m \tag{6}$$

[Hinweis: Multiplizieren Sie dazu die linke Seite von Gl. (5) mit $H_m(z)e^{-z^2}$ und integrieren Sie über z. Subtrahieren Sie die entsprechende Gleichung, in der Sie m und n vertauschen.]