Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Andreas Poenicke, Andreas Heimes

Blatt 5
Besprechung 28.05.2014

---

1. Linearer und quadratischer Stark-Effekt (2,5 Punkte)

Wir betrachten die beiden energetisch niedrigsten Zustände $|1\rangle$ und $|2\rangle$ des Doppelmulden-Potenzials aus Aufgabe 2c) Blatt 3:

$$\left\langle x \,\middle|\, \hat{\mathcal{H}}_0 \,\middle|\, x \right\rangle = H_0(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) \qquad \text{mit} \qquad V(x) = \begin{cases} \infty & |x| > b \\ v_0\delta(x) & |x| \le b. \end{cases}$$

In Ortsdarstellung sind diese gegeben durch

$$\psi_i(x) \equiv \langle x|i\rangle = \begin{cases} A_i \sin(k_i[b+x]) & -b < x < 0 \\ B_i \sin(k_i[b-x]) & 0 \le x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $A_1 = B_1$ und $A_2 = -B_2$. (Die Wellenvektoren k_1 und k_2 müssen für die Aufgabe nicht berechnet werden.)

(a) [0,5 Punkte] Bestimmen Sie die Koeffizienten A_i so, dass die Normierungsbedingung $\langle i|i\rangle = 1$ für $i = 1, 2$ erfüllt ist.

(b) [1 Punkt] Nun wird ein elektrisches Feld $\vec{E} = \mathcal{E}\hat{e}_x$ angelegt. Der Hamilton-Operator ist dementsprechend gegeben durch

$$\langle x|\hat{\mathcal{H}}|x\rangle = H(x) = H_0(x) + q\mathcal{E}x. \tag{1}$$

Berechnen Sie die Matrixelemente $h_{ij} = \langle i|\hat{\mathcal{H}}|j\rangle$, $i, j = 1, 2$ und zeigen Sie, dass sich der Hamilton-Operator in der Basis

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

schreiben lässt durch

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} E_1 & d\,\mathcal{E} \\ d^*\,\mathcal{E} & E_2 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Hinweise:

- Benutzen Sie, dass $\psi_{1,2}(x)$ Eigenfunktionen von $H_0(x)$ mit den Eigenwerten $E_{1,2}$ sind.
- Das Integral $\int_0^b \sin(k_1x)\sin(k_2x)x\mathrm{d}x$ muss nicht berechnet werden. Ersetzen Sie es durch eine Konstante $C(k_1, k_2)$.

(c) [1 Punkt] Berechnen Sie die Eigenwerte und (unnormierten) Eigenvektoren von $\hat{\mathcal{H}}$. Betrachten Sie für die Eigenwerte die Grenzfälle:

- Kleines Feld $|d|\mathcal{E} \ll E_2 - E_1$ [Hinweis: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \cdots$],
- Großes Feld $|d|\mathcal{E} \gg E_2 - E_1$.

2. Funktionen von Operatoren (2,5 Punkte)

(a) [0,5 Punkte] Berechnen Sie $e^{\hat{\sigma}_z}$, wobei $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass für einen (zeitunabhängigen) Operator $\hat{A}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\hat{A}t} = \hat{A} e^{\hat{A}t} = e^{\hat{A}t} \hat{A}$$

gilt. Berechnen Sie weiter $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\hat{A}t} e^{\hat{B}t}\right)$, wobei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zeitunabhängig sind.

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass für einen beliebigen zeitabhängigen Operator $\hat{A}(t)$ im allgemeinen gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{\hat{A}(t)} \neq \frac{\mathrm{d}\hat{A}(t)}{\mathrm{d}t} e^{\hat{A}(t)}. \tag{4}$$

Unter welcher Bedingung sind die beiden Seiten von Gleichung 4 gleich?

3. Hermite'sche Adjungation und Kommutatoralgebra (3 Punkte)

(a) [0.5 Punkte] Berechnen Sie die Hermite'schen Adjungierten von $\hat{X}\hat{P}_x$ und $i[\hat{X}^2, \hat{P}_x]$.

(b) [1 Punkt] Sei $\hat{G}$ ein Hermite'scher Operator. Zeigen Sie, dass dann für $\hat{F} = e^{i\hat{G}}$ die Beziehung $\hat{F}^\dagger = \hat{F}^{-1}$ gilt.

(c) [0.5 Punkte] Zeigen Sie, dass gilt $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$.

(d) [1 Punkt] Beweisen Sie, dass für $[[A, B], A] = 0$ die Beziehung $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$ gilt ($n \in \mathbb{N}$).
Berechnen Sie damit $[\hat{P}, \hat{X}^n]$.

4. Orts- und Impulsdarstellung (2 Punkte)

Zeigen Sie, ausgehend von der Impulsdarstellung

$$\hat{P}\,|p\rangle = p\,|p\rangle \quad \text{mit} \quad u_p(x) \equiv \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}, \tag{5}$$

dass in der Ortsdarstellung der Impulsoperator $\hat{P}$ durch

$$\langle x|\hat{P}|\psi\rangle = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x)$$

darstellbar ist.

In der nächsten Woche findet die **Übungsklausur** statt:

Mittwoch, den 04.06, von 14:00 bis 16:00 Uhr.

Die Einteilung der Hörsäle erfolgt entsprechend des Anfangsbuchstaben des Nachnamen,

A-R: Gerthsen-Hörsaal
S-Z: Gaede-Hörsaal

Bringen Sie bitte Ihren Studentenausweis mit, eine vorherige Anmeldung ist nicht notwendig. Als **Hilfsmittel** ist **ein doppelseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** erlaubt.