Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön

Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 6

Besprechung 11.06.2014

---

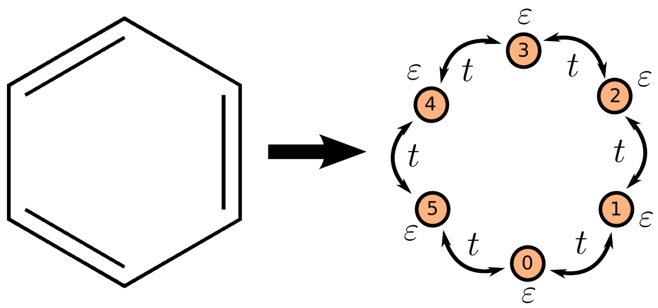
1. Benzol (3 Punkte)

Ein Benzolring besteht aus sechs Kohlenstoffatomen. Wir beschreiben dieses System im folgenden phenomenologisch durch ein effektives lokales Einteilchenniveau ε und eine Hüpfamplitude t. In der lokalen Basis $\{|n\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle, ..., |5\rangle\}$, wobei $|n\rangle$ der auf dem n-ten Atom lokalisierte Zustand ist, liest sich der Hamilton-Operator wie folgt:

$$\hat{H} = t\sum_{n=0}^{5}\big(\,|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|\,\big) + \varepsilon\sum_{n=0}^{5}|n\rangle\langle n|\ ,$$

mit der periodischen Randbedingung $|0\rangle = |6\rangle$. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren in der Basis $\{|n\rangle\}$.

[Hinweis: Diagonalisieren Sie den Hamilton-Operator, indem Sie in die Fourierdarstellung wechseln, d.h. wechseln Sie zu der Basis $|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\sum_{n=0}^{5} e^{ikn}|n\rangle$.]



2. Baker-Hausdorff-Theorem (2 Punkte)

Es gelte, dass $\hat{A}$ und $\hat{B}$ mit dem Kommutator $[\hat{A},\hat{B}]$ vertauschen, also $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$ und $[\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}}e^{\hat{B}}e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}.$$

[Hinweis: Definieren Sie einen Operator $\hat{T}(\lambda) := e^{\hat{A}\lambda}e^{\hat{B}\lambda}$ und betrachten Sie $\frac{\partial \hat{T}(\lambda)}{\partial\lambda}$. Verwenden Sie dabei die Relation $[\hat{B},\hat{A}^n] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{B},\hat{A}]$ (siehe Blatt 5, Aufg.3d) für den Kommutator $[\hat{B}, e^{-\hat{A}\lambda}]$.]

3. Messprozess (5 Punkte)

Ein Qubit (**Qu**antum **bit**) ist ein quantenmechanisches Zwei-Zustands-System. Ein physikalisches Beispiel haben wir schon in Aufgabe 2 c) auf Blatt 3 kennengelernt. In der Basis der energetisch niedrigsten Zustände des dort diskutierten Doppelmulden-Potenzials, $\{|1\rangle, |2\rangle\}$, lässt sich der Hamilton-Operator schreiben als

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = \frac{E_1 + E_2}{2}\mathbb{1} + \frac{E_1 - E_2}{2}\hat{\sigma}_z = \varepsilon\mathbb{1} - \frac{\delta\varepsilon}{2}\hat{\sigma}_z, \tag{1}$$

wobei $\mathbb{1}$ die 2×2-Einheitsmatrix ist und

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

die Pauli-Matrizen sind. Das Qubit sei in einem beliebigen Zustand $|\psi\rangle = \alpha\,|1\rangle + \beta\,|2\rangle$ präpariert.

(a) [1 Punkt] Bestimmen Sie den Erwartungswert der Energie $\langle\hat{H}\rangle$ und die Standartabweichung $\Delta E = \sqrt{\langle\hat{H}^2\rangle - \langle\hat{H}\rangle^2}$.

(b) [1 Punkt] Nun wird die Observable $\hat{A} = \hat{\sigma}_x$ gemessen. Welcher Wert wird mit welcher Wahrscheinlichkeit gemessen? Was ist der entsprechende Zustand nach der Messung?

(c) [1 Punkt] Unmittelbar nach der Messung in (b) wird die Energie $\hat{H}$ gemessen. Bestimmen Sie wiederum den Wert und die dazugehörige Wahrscheinlichkeit.

(d) [2 Punkte] Nun werde das Qubit im Grundzustand $|1\rangle$ präpariert. Die Observablen $\hat{B} = \hat{\sigma}_y$ und $\hat{A} = \hat{\sigma}_x$ werden unmittelbar nacheinander in der Reihenfolge $\hat{B}$, dann $\hat{A}$ gemessen. Welches sind die möglichen Messergebnisse der zwei Messungen und was sind die Wahrscheinlichkeiten, diese Ergebnisse zu messen?