Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Dr. Andreas Poenicke, Andreas Heimes

Blatt 8
Besprechung 25.06.2014

---

1. Teilchen im Magnetfeld - Landau-Niveaus (2 Punkte)

Ein Teilchen mit der Ladung q befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. Eine geschickte Wahl des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ ist in diesem Fall durch die Landau-Eichung mit $\mathbf{A} = Bx\hat{e}_y$ gegeben.

Wir nehmen an, dass das Teilchen wie in einem 2-dimensionalen Elektronengas auf die xy-Ebene eingeschränkt ist. Damit lautet der Hamilton-Operator des Problems

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\big(\hat{\mathbf{P}} - q\mathbf{A}\big)^2 = \frac{1}{2m}\Big(\hat{P}_x^2 + \big(\hat{P}_y - qBx\big)^2\Big). \tag{1}$$

In der Aufgabe sollen nun die Eigenfunktionen und Eigenenergien des Problems gefunden werden.

(a) [0,5 Punkte] Nutzen Sie $[\hat{H}, \hat{P}_y] = 0$ und die Eigenfunktionen von $\hat{P}_y$, um einen geeigneten Separationsansatz für die Wellenfunktion $\psi(x, y)$ zu machen.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die Schrödingergleichung damit auf die Form des 1-dimensionalen harmonischen Oszillators gebracht werden kann.

(c) [0,5 Punkte] Nutzen Sie die Kenntnis der Lösung des harmonischen Oszillators um die Eigenenergien und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators (1) zu finden. Wodurch ist die charakteristische Frequenz ω_c des Problems gegeben?

2. Harmonischer Oszillator (2 Punkte)

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators wird durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ geschrieben als

$$\hat{H} = \hbar\omega\big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\big). \tag{2}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(t)\rangle$ gegeben durch

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \tag{3}$$

wobei $|0\rangle$ der Grundzustand und $|1\rangle$ der erste angeregte Zustand ist. Die Zeitentwicklung des Zustands ist durch $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle$ mit dem Zeitentwickungsoperator $\hat{U} = \exp\big(-i\hat{H}t/\hbar\big)$ gegeben.

(a) [0,5 Punkte] Berechnen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$.

(b) [1 Punkt] Berechnen Sie $\langle\hat{X}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{X}\,|\psi(t)\rangle$ mit $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\big)$, sowie $\langle\hat{P}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{P}\,|\psi(t)\rangle$ mit $\hat{P} = \mathrm{i}\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\big(\hat{a}^\dagger - \hat{a}\big)$.

(c) [0,5 Punkte] Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle\hat{X}_H(t)\hat{X}_H(0)\rangle$. Hinweis: Benutzen Sie dazu das Heisenberg-Bild.

3. Eigenschaften des Drehimpulsoperators (3 Punkte)

Der Vektoroperator $\hat{\mathbf{J}}$ mit $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ definiert einen Drehimpulsoperator definiert, wenn die folgenden Vertauschungsrelation erfüllt sind:

$$\big[\hat{J}_x, \hat{J}_y\big] = \mathrm{i}\hbar \hat{J}_z, \quad \big[\hat{J}_y, \hat{J}_z\big] = \mathrm{i}\hbar \hat{J}_x, \quad \text{und} \quad \big[\hat{J}_z, \hat{J}_x\big] = \mathrm{i}\hbar \hat{J}_y \tag{4}$$

Neben den einzelnen Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{J}_{x/y/z}$ werden häufig auch die folgenden Operatoren benötigt:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \quad \hat{J}_+ = \hat{J}_x + \mathrm{i}\hat{J}_y, \quad \text{und} \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - \mathrm{i}\hat{J}_y. \tag{5}$$

Verwenden Sie die genannten Relationen bzw. Definitionen um die nachfolgenden Zusammenhänge zu zeigen:

(a) [1 Punkt] $$\big[\hat{J}_z, \hat{J}_+\big] = \hbar \hat{J}_+, \quad \big[\hat{J}_z, \hat{J}_-\big] = -\hbar \hat{J}_- \quad \text{und} \quad \big[\hat{J}_+, \hat{J}_-\big] = 2\hbar \hat{J}_z. \tag{6}$$

(b) [1 Punkt] $$\big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\big] = \big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_+\big] = \big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_-\big] = 0. \tag{7}$$

(c) [1 Punkt]

$$\begin{aligned}
\hat{J}_+ \hat{J}_- &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar \hat{J}_z \\
\hat{J}_- \hat{J}_+ &= \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar \hat{J}_z \\
\hat{\mathbf{J}}^2 &= \frac{1}{2}\big(\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+\big) + \hat{J}_z^2
\end{aligned} \tag{8}$$

4. Bahndrehimpuls (3 Punkte)

Der Bahndrehimpuls-Operator ist durch $\hat{\mathbf{L}} = \big(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\big) = \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{P}}$ gegeben.
In Kugelkoordinaten

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist der Gradient gegeben durch

$$\nabla_{r,\theta,\phi} = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{9}$$

mit

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \\
\hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \\
\hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y.
\end{aligned} \tag{10}$$

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten die Form hat:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\Big(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \quad \text{und} \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{11}$$

(b) [1 Punkt] Der Zustand eines Teilchens sei nun durch die Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = (x + y + 2z) N e^{-r^2/\alpha^2} \tag{12}$$

mit $N, \alpha \in \mathbb{R}$ beschrieben. Es gilt

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big), \tag{13}$$

Zeigen Sie, dass $\psi(\mathbf{r})$ eine Eigenfunktion von $\hat{\mathbf{L}}^2$ ist, also

$$\hat{\mathbf{L}}^2 \psi(\mathbf{r}) = l(l+1)\hbar^2 \psi(\mathbf{r}), \tag{14}$$

und bestimmen Sie den Wert von l.

(c) [1 Punkt] Drücken Sie nun die Wellenfunktion (12) durch eine Superposition geeigneter Kugelflächenfunktionen aus. Welche Werte können für die z-Komponente $\hat{L}_z$ des Bahndrehimpuls gemessen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese gemessen?