Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theoretische Festkörperphysik

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 8
Besprechung 25.06.2014

---

1. Teilchen im Magnetfeld - Landau-Niveaus (2 Punkte)

Ein Teilchen mit der Ladung q befinde sich in einem homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B\hat{e}_z$. Eine geschickte Wahl des Vektorpotentials $\mathbf{A}$ ist in diesem Fall durch die Landau-Eichung mit $\mathbf{A} = Bx\hat{e}_y$ gegeben.

Wir nehmen an, dass das Teilchen wie in einem 2-dimensionalen Elektronengas auf die xy-Ebene eingeschränkt ist. Damit lautet der Hamilton-Operator des Problems

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\big(\hat{\mathbf{P}} - q\mathbf{A}\big)^2 = \frac{1}{2m}\Big(\hat{P}_x^2 + \big(\hat{P}_y - qBx\big)^2\Big). \tag{1}$$

In der Aufgabe sollen nun die Eigenfunktionen und Eigenenergien des Problems gefunden werden.

(a) [0.5 Punkte] Es soll ausgenutzt werden, das gilt $[\hat{H}, \hat{P}_y] = 0$ um einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x, y)$ zu machen:
Da $\hat{p}_y$ mit dem Hamilton-Operator vertauscht, d.h. Eigenfunktionen des Impulsoperators $\hat{P}_y$ auch Eigenfunktionen des Hamilton-Operators sind, drängt sich der Separationsansatz

$$\psi(x, y) = e^{ip_y y/\hbar}\chi(x) \tag{2}$$

auf.

(b) [1 Punkt] Setzt man nun diesen Ansatz in die Schrödingergleichung ein, und verwendet gleich $\hat{P}_y e^{ip_y y/\hbar} = p_y e^{ip_y y/\hbar}$ erhält man

$$\frac{1}{2m}\Big(\hat{P}_x^2 + \big(p_y - qBx\big)^2\Big)\chi(x) = E\chi(x). \tag{3}$$

Mit der Substitution $\bar{x} = x - \frac{p_y}{qB} = x - x_0$ sieht man nun deutlich, dass man das Problem auf die Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators zurückgeführt hat:

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\bar{x}^2} + \frac{m}{2}\Big(\frac{qB}{m}\Big)^2\bar{x}^2\Big]\chi(\bar{x}) = E\chi(\bar{x}) \tag{4}$$

(c) [0.5 Punkt] Die Kenntnis der Lösung des harmonischen Oszillators soll nun genutzt werden um die Eigenenergien und -funktionen des Hamilton-Operators (1) zu finden.
Die Eigenenergien des harmonischen Oszillators mit $\hat{H} = \frac{1}{2m}P_x^2 + \frac{m}{2}\omega^2 X^2$ sind durch $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ gegeben. Entsprechend sind die Eigenenergien hier

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c \qquad \text{mit} \qquad \omega_c = \frac{qB}{m}. \tag{5}$$

Die charakteristische Frequenz ω_c des Problems ist also die klassische Zyklotronfrequenz.

Die Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators sind

$$\psi_n(x) = \big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\big)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\Big(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\Big)e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2}, \tag{6}$$

und für das Teilchen im Magnetfeld ergibt sich damit

$$\psi_n(x, y) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}\ell^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}H_n\Big(\frac{x - x_0}{\ell}\Big)\exp\Big[-\frac{1}{2}\Big(\frac{x - x_0}{\ell}\Big)^2\Big]e^{ip_y y/\hbar} \quad \text{mit} \quad x_0 = \frac{p_y}{qB}. \tag{7}$$

Im letzten Ausdruck haben wir mit der magnetischen Länge $\ell = \sqrt{\frac{\hbar}{qB}}$ zusätzlich die charakteristische Längenskala des Problems eingeführt.

2. Harmonischer Oszillator (2 Punkte)

Der Hamilton-Operator des harmonischen Oszillators wird durch die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ geschrieben als

$$\hat{H} = \hbar\omega\big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\big). \tag{8}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(t)\rangle$ gegeben durch

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \tag{9}$$

wobei $|0\rangle$ der Grundzustand und $|1\rangle$ der erste angeregte Zustand ist. Die Zeitentwicklung des Zustands ist durch $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|0\rangle$ mit dem Zeitentwickungsoperator $\hat{U} = \exp\big(\frac{-i}{\hbar}\hat{H}t\big)$ gegeben.

(a) [0,5 Punkt] Berechnen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ für $t > 0$.
Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$:

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\,|0\rangle \quad \text{und} \quad \hat{H}\,|1\rangle = \frac{3\hbar\omega}{2}\,|1\rangle \tag{10}$$

$$\hat{H}^n\,|0\rangle = \big(\frac{\hbar\omega}{2}\big)^n\,|0\rangle \quad \text{und} \quad \hat{H}^n\,|1\rangle = \big(\frac{3\hbar\omega}{2}\big)^n\,|1\rangle \tag{11}$$

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi(0)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\hat{U}(t)\,|0\rangle + \hat{U}(t)\,|1\rangle\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(-i\hat{H}t/\hbar\big)^n\,|0\rangle + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\big(-i\hat{H}t/\hbar\big)^n\,|1\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-i\omega t/2}\,|0\rangle + e^{-i3\omega t/2}\,|1\rangle\Big) \end{aligned} \tag{12}$$

(b) [0,5 Punkte] Berechnen Sie $\langle\hat{X}\rangle(t) = \langle\psi(t)|\,\hat{X}\,|\psi(t)\rangle$ mit $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\big)$.

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|\,\hat{a}^\dagger\,|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|\,\hat{a}^\dagger\,|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger\,|1\rangle\,e^{-i\omega t} + \langle 1|\,\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\,e^{i\omega t} + \langle 1|\,\hat{a}^\dagger\,|1\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|\,\sqrt{1}\,|1\rangle + \langle 0|\,\sqrt{2}\,|2\rangle\,e^{-i\omega t} + \langle 1|\,\sqrt{1}\,|1\rangle\,e^{+i\omega t} + \langle 1|\,\sqrt{2}\,|2\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{13}$$

und $\langle\psi(t)|\,\hat{a}\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{a}^\dagger\,|\psi(t)\rangle^* = \frac{1}{2}e^{-i\omega t}$ damit

$$\langle\hat{X}\rangle(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \tag{14}$$

analog

$$\langle\hat{P}\rangle(t) = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} = -\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin(\omega t) \tag{15}$$

(c) [0,5 Punkte] Berechnen Sie die Korrelationsfunktion $\langle\hat{X}_H(t)\hat{X}_H(0)\rangle$. Hinweis: Benutzen Sie dazu das Heisenberg-Bild.

$$\begin{aligned} \langle\hat{X}_H(t)\hat{X}_H(0)\rangle = \langle\psi(0)|\,e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{X}e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{X}\,|\psi(0)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0| + \langle 1|\Big)e^{i\hat{H}t/\hbar}\hat{X}e^{-i\hat{H}t/\hbar}\hat{X}\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\hbar}{2m\omega}\Big(e^{i\omega t/2}\,\langle 0| + e^{3i\omega t/2}\,\langle 1|\Big)\big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\big)e^{-i\hat{H}t/\hbar}\big(\hat{a}^\dagger + \hat{a}\big)\Big(|0\rangle + |1\rangle\Big) \\ &= \frac{\hbar}{4m\omega}\Big(e^{i\omega t/2}\,\langle 1| + e^{3i\omega t/2}\,\langle 2|\,\sqrt{2} + e^{3i\omega t/2}\,\langle 0|\Big)e^{-i\hat{H}t/\hbar}\Big(|1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + |0\rangle\Big) \\ &= \frac{\hbar}{4m\omega}\Big(e^{-i\omega t}\,\langle 1| + e^{-i\omega t}\,\langle 2|\,\sqrt{2} + e^{i\omega t}\,\langle 0|\Big)\Big(|1\rangle + \sqrt{2}\,|2\rangle + |0\rangle\Big) \\ &= \frac{\hbar}{4m\omega}\big(e^{-i\omega t} + 2e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\big) \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\big(\cos(\omega t) + e^{-i\omega t}\big) \end{aligned} \tag{16}$$

3. Eigenschaften des Drehimpulsoperators (3 Punkte)

Der Vektoroperator $\hat{\mathbf{J}}$ mit $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ und $\hat{J}_z$ definiert einen Drehimpulsoperator, wenn die folgenden Vertauschungsrelation erfüllt sind:

$$\big[\hat{J}_x, \hat{J}_y\big] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_z, \quad \big[\hat{J}_y, \hat{J}_z\big] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_x, \quad \text{und} \quad \big[\hat{J}_z, \hat{J}_x\big] = \mathrm{i}\hbar\hat{J}_y \tag{17}$$

Neben den einzelnen Komponenten des Drehimpulsoperators $\hat{J}_{x/y/z}$ werden häufig auch die folgenden Operatoren benötigt:

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2, \quad \hat{J}_+ = \hat{J}_x + \mathrm{i}\hat{J}_y, \quad \text{und} \quad \hat{J}_- = \hat{J}_x - \mathrm{i}\hat{J}_y. \tag{18}$$

Verwenden Sie die genannten Relationen bzw. Definitionen um die nachfolgenden Zusammenhänge zu zeigen:

(a) [1 Punkt]

$$\big[\hat{J}_z, \hat{J}_+\big] = \big[\hat{J}_z, \hat{J}_x\big] + i\big[\hat{J}_z, \hat{J}_y\big] = i\hbar\hat{J}_y + \hat{J}_x = \hbar\hat{J}_+ \tag{19}$$

$$\big[\hat{J}_z, \hat{J}_-\big] = \big[\hat{J}_z, \hat{J}_x\big] - i\big[\hat{J}_z, \hat{J}_y\big] = i\hbar\hat{J}_y - \hat{J}_x = -\hbar\hat{J}_- \tag{20}$$

$$\big[\hat{J}_+, \hat{J}_-\big] = \big[\hat{J}_x, \hat{J}_x\big] + i\big[\hat{J}_y, \hat{J}_x\big] - i\big[\hat{J}_x, \hat{J}_y\big] - \big[\hat{J}_y, \hat{J}_y\big] = 2\hbar\hat{J}_z \tag{21}$$

(b) [1 Punkt]

$$\big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\big] = \big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_+\big] = \big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_-\big] = 0. \tag{22}$$

$$\big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_z\big] = \big[\hat{J}_x{}^2, \hat{J}_z\big] + \big[\hat{J}_y{}^2, \hat{J}_z\big] = J_x \underbrace{\big[\hat{J}_x, \hat{J}_z\big]}_{-i\hbar\hat{J}_y} + \underbrace{\big[\hat{J}_x, \hat{J}_z\big]}_{-i\hbar\hat{J}_y} \hat{J}_x + J_y \underbrace{\big[\hat{J}_y, \hat{J}_z\big]}_{i\hbar\hat{J}_x} + \underbrace{\big[\hat{J}_y, \hat{J}_z\big]}_{i\hbar\hat{J}_x} \hat{J}_y = 0.$$

Analog zeigt man, dass $\big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_x\big] = \big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_y\big] = 0$.

Aus der Linearität des Kommutators folgt damit direkt $\big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_\pm\big] = \big[\hat{\mathbf{J}}^2, \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\big] = 0$.

(c) [1 Punkt]

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 + \hbar\hat{J}_z \tag{23}$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar J_z = \hat{\mathbf{J}}^2 - \hat{J}_z^2 - \hbar\hat{J}_z \tag{24}$$

$$\hat{\mathbf{J}}^2 = \frac{1}{2}\big(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+\big) + \hat{J}_z^2 \tag{25}$$

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = (\hat{J}_x + i\hat{J}_y)(\hat{J}_x - i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + i(\hat{J}_y\hat{J}_x - \hat{J}_x\hat{J}_y) + \hat{J}_y^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - i\big[\hat{J}_x, \hat{J}_y\big] = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hbar\hat{J}_z \tag{26}$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = (\hat{J}_x - i\hat{J}_y)(\hat{J}_x + i\hat{J}_y) = \hat{J}_x^2 + i(\hat{J}_x\hat{J}_y - \hat{J}_y\hat{J}_x) + \hat{J}_y^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + i\big[\hat{J}_x, \hat{J}_y\big] = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 - \hbar J_z \tag{27}$$

Durch Addition der beiden Terme (26) und (27) erhält man direkt

$$\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ = 2\hat{J}_x^2 + 2\hat{J}_y^2 = 2\hat{\mathbf{J}}^2 - 2\hat{J}_z^2. \tag{28}$$

4. Bahndrehimpuls (3 Punkte)

Der Bahndrehimpuls-Operator ist durch $\hat{\mathbf{L}} = \big(\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z\big) = \hat{\mathbf{R}} \times \hat{\mathbf{P}}$ gegeben.

In Kugelkoordinaten

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \quad \text{mit} \quad r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ist der Gradient gegeben durch

$$\nabla_{r,\theta,\phi} = \hat{\mathbf{e}}_r\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, \tag{29}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y + \cos\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y - \sin\theta\,\hat{\mathbf{e}}_z \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin\phi\,\hat{\mathbf{e}}_x + \cos\phi\,\hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned} \tag{30}$$

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der Drehimpulsoperator in Kugelkoordinaten die Form hat:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\Big(-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big),\quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\Big(\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \text{ und } \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{31}$$

Es gilt

$$\hat{\mathbf{e}}_r \times \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad , \hat{\mathbf{e}}_\theta \times \hat{\mathbf{e}}_\phi = \hat{\mathbf{e}}_r \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_\theta. \tag{32}$$

Der Drehimpulsoperator ist nun gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}\hat{\mathbf{L}} =& \hat{\mathbf{r}} \times \nabla = r\hat{\mathbf{e}}_\mathbf{r} \times \big(\hat{\mathbf{e}}_r\partial_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi\frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi\big) \\ =& \hat{\mathbf{e}}_\phi\partial_\theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta\frac{1}{\sin\theta}\partial_\phi \\ =& \big(-\sin\phi - \frac{\cos\phi\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_x + \big(\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi\cos\theta}{\sin\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_y + \partial_\phi\hat{\mathbf{e}}_z \\ =& \big(-\sin\phi - \frac{\cos\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_x + \big(\cos\phi\partial_\theta - \frac{\sin\phi}{\tan\theta}\partial_\phi\big)\hat{\mathbf{e}}_y + \partial_\phi\hat{\mathbf{e}}_z \end{aligned} \tag{33}$$

(b) [1 Punkt] Der Zustand eines Teilchens sei nun durch die Wellenfunktion

$$\psi(\mathbf{r}) = (x + y + 3z)Ne^{-r^2/\alpha^2} \tag{34}$$

mit $N, \alpha \in \mathbb{R}$ beschrieben. Zeigen Sie, dass $\psi(\mathbf{r})$ eine Eigenfunktion von $\hat{\mathbf{L}}^2$ ist, also

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi(\mathbf{r}) = l(l+1)\hbar^2\psi(\mathbf{r}), \tag{35}$$

und bestimmen Sie den Wert von l.
Zuerst schreiben wir die Wellenfunktion (34) in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} \psi(r,\theta,\phi) &= (r\sin\theta\cos\phi + r\sin\theta\sin\phi + 2r\cos\theta)Ne^{-r^2/\alpha^2} \\ &= (\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta)f(r), \end{aligned} \tag{36}$$

wobei der radiale Teil in $f(r) = rNe^{-r^2/\alpha^2}$ faktorisiert wurde, da die Drehimpulsoperatoren nicht auf r wirken.
Nun wenden wir $\hat{\mathbf{L}}^2$ auf die Wellenfunktion an

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi(r,\theta,\phi) = -\hbar^2\Big(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big)(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta)f(r) \tag{37}$$

und berechnen nacheinander die Ableitungen

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) = -(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) &= \frac{-1}{\sin^2\theta}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) \\ &= \frac{-1}{\sin\theta}(cos\phi + \sin\phi) \end{aligned} \tag{39}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) &= \frac{1}{\tan\theta}(\cos\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi - 2\sin\theta) \\ &= \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\big(\cos\phi + \sin\phi\big) - 2\cos\theta \end{aligned} \tag{40}$$

kombinieren wir die Terme

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}}^2\psi(r,\theta,\phi) &= \hbar^2\Big((\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta) + \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta}(\cos\phi + \sin\phi) + 2\cos\theta\Big)f(r) \\ &= \hbar^2\big(2\,(\sin\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi + 2\cos\theta)\big)f(r) \\ &= 2\hbar\psi(r,\theta,\phi) \end{aligned} \tag{41}$$

damit ist $\psi(r,\theta,\phi)$ eine Eigenfunktion mit dem Eigenwert $2\hbar = l(l+1)\hbar$, womit man $l = 1$ direkt ablesen kann.

(c) [1 Punkt] Drücken Sie nun die Wellenfunktion (34) durch eine Superposition geeigneter Kugelflächenfunktionen aus. Welche Werte können für die z-Komponente $\hat{L}_z$ des Bahndrehimpuls gemessen werden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden diese gemessen?

Die Kugelflächenfunktionen sind vollständig und orthogonal. Die Koeffizienten könnten also durch Projekt auf diese Zustände gefunden werden. Da wir jedoch schon wissen, dass $l = 1$ gilt, kann der Zustand nur durch eine Superposition der Funktionen $Y_{l=1}^{m}(\theta, \phi)$ ausgedrückt werden. Wir benötigen also nur die drei Kugelflächenfunktionen

$$Y_1^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta, \quad Y_1^1(\theta,\phi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \quad \text{und} \quad Y_1^{-1}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}. \tag{42}$$

und finden die Koeffizienten durch Vergleich mit (36).

$$\begin{aligned} \psi(r,\theta,\phi) &= \Big(-\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\big(Y_1^1(\theta,\phi) + Y_1^{-1}(\theta,\phi)\big) + i\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\big(Y_1^1(\theta,\phi) - Y_1^{-1}(\theta,\phi)\big) + 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}Y_1^0(\theta,\phi)\Big) f(r) \\ &= \Big(\underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-1)\big(1-i\big)}_{c_1} Y_1^1(\theta,\phi) + \underbrace{4\sqrt{\frac{\pi}{3}}}_{c_0} Y_1^0(\theta,\phi) + \underbrace{\sqrt{\frac{2\pi}{3}}(-1)\big(1+i\big)}_{c_{-1}} Y_1^{-1}(\theta,\phi)\Big) f(r) \end{aligned} \tag{43}$$

In einer Messung von $\hat{L}_z$ können die Werte $\hbar m$ mit $m = -1, 0, 1$ gefunden werden. Wir haben die Wellenfunktion nicht normiert, d.h. $f(r)$ ist also nur bis auf einen konstanten Faktor N bekannt. Bei der Berechnung der Messwahrscheinlichkeiten der verschiedenen Drehimpulswerte fällt $f(r)$ jedoch raus

$$P(m=-1) = \frac{|c_{-1}|^2}{|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2} \tag{44}$$

$$P(m=0) = \frac{|c_0|^2}{|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2} \tag{45}$$

$$P(m=+1) = \frac{|c_1|^2}{|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2} \tag{46}$$

$$|c_{-1}|^2 = \frac{2\pi}{3}|1-i|^2 = \frac{4\pi}{3}, \quad |c_0|^2 = \frac{4^2\pi}{3} \quad \text{und} \quad |c_1|^2 = \frac{2\pi}{3}|1+i|^2 = \frac{4\pi}{3} \tag{47}$$

und somit $|c_{-1}|^2 + |c_0|^2 + |c_1|^2 = 6\frac{4\pi}{3}$. Für die Messwahrscheinlichkeiten ergeben sich damit die Werte

$$P(m=-1) = \frac{1}{6} \qquad P(m=0) = \frac{2}{3} \qquad P(m=+1) = \frac{1}{6}. \tag{48}$$