Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 9
Besprechung 02.07.2014

---

1. Harmonischer Oszillator und Drehimpuls (4 Punkte)

Wir betrachten den zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \sum_{j=x,y} \frac{P_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 X_j^2 .$$

Es seien $b_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X_j - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P_j$ und $b_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} X_j + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}} P_j$ die entsprechenden Auf- und Absteigeoperatoren, welche die Vertauschungsrelationen $[b_i,\, b_j^\dagger] = \delta_{ij}$ erfüllen. Im Folgenden führen wir die Operatoren $a_+ = (b_x + ib_y)/\sqrt{2}$ und $a_- = (b_x - ib_y)/\sqrt{2}$ ein.

(a) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass a_+ und a_- die Vertauschungsrelationen $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ erfüllen. Zeigen Sie weiterhin, dass das Tensorprodukt $|n_+,\, n_-\rangle = |n_+\rangle \otimes |n_-\rangle$ der Eigenzustände von $N_+ = a_+^\dagger a_+$ und $N_- = a_-^\dagger a_-$ Eigenzustände zu H sind. Bestimmen Sie die Energie-Eigenwerte und deren Entartung.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass die drei Operatoren

$$J_+ = \hbar a_+^\dagger a_-, \quad J_- = \hbar a_-^\dagger a_+, \quad J_z = \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-).$$

der Drehimpuls-Algebra $[J_+,\, J_-] = 2\hbar J_z$, $[J_z,\, J_\pm] = \pm\hbar J_\pm$ genügen (siehe Blatt 8 Aufgabe 3).

(c) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass $[\boldsymbol{J}^2, H] = 0$ und $[J_z, H] = 0$ und dass die Eigenzustände $|n_+\, n_-\rangle$ darstellbar sind durch die Quantenzahlen j und m der Drehimpuls-Operatoren $\boldsymbol{J}^2$ und J_z, d.h.

$$|j,\, m\rangle = \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle . \tag{1}$$

[Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\boldsymbol{J}^2 = \hbar^2 \frac{N}{2}(\frac{N}{2}+1)$ mit $N = N_+ + N_-$ und $J_z = \hbar(N_+ - N_-)/2$.]

(d) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass für $m < j$

$$J_+ |j,\, m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}\, |j,\, m+1\rangle ,$$

indem Sie J_+ auf Gl. (1) anwenden und dabei die Vertauschungsrelationen für $a_\pm$ und $a_\pm^\dagger$ benutzen. Zeigen Sie außerdem, dass

$$K_+ |j,\, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}\, |j+1,\, m\rangle ,$$

wobei $K_+ = \hbar\, a_+^\dagger a_-^\dagger$.

[Hinweis: Zeigen sie zunächst, dass $a_\pm (a_\pm^\dagger)^p = (a_\pm^\dagger)^p a_\pm + p(a_\pm^\dagger)^{p-1}$ mit $p \in \mathbb{N}$.]

2. Fock-Darwin-Spektrum (2 Punkte)

Wir betrachten den zweidimensionalen Harmonischen Oszillator im Magnetfeld, d.h.

$$H = \frac{(P_x + \frac{qB}{2}X_y)^2}{2m} + \frac{(P_y - \frac{qB}{2}X_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X_x^2 + X_y^2). \tag{2}$$

wobei wir die Eichung $\boldsymbol{A} = B/2(-X_y, X_x, 0)$ für das Vektorpotenzial genutzt haben. Schreiben Sie Gl. (2) ausgedrückt durch die in Aufgabe 1 definierten Auf- und Absteigeoperatoren $a_\pm^\dagger$ und $a_\pm$. Bestimmen und Skizzieren Sie das Energiespektrum als Funktion des Magnetfeldes.

3. Radialfunktionen des Wasserstoffatoms (4 Punkte)

Ausgehend von der Radialgleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}\right]u_{k,l}(r) = E_{k,l}u_{k,l}(r), \tag{3}$$

welche in der Vorlesung hergeleitet wurde, wollen wir im Folgenden die Radiallösungen $u_{k,l}(r)$ herleiten.

(a) [0.5 Punkte] Schreiben Sie Gl. (3) mit der dimensionslosen Variablen $\rho = 2\kappa r$ und dem dimensionslosen Parameter $\frac{1}{\lambda_{k,l}} = \frac{1}{\kappa a_0}$, wobei $\kappa = \sqrt{\frac{-2mE_{k,l}}{\hbar^2}}$ und $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$.

(b) [0.5 Punkte] Zeigen Sie, dass im Limes $\rho \to \infty$ die physikalisch relevante Lösung näherungsweise gegeben ist durch $u_{k,l}(\rho) = \exp(-\rho/2)$.

(c) [1 Punkt] Machen Sie den Ansatz $u_{k,l}(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho/2}v_{k,l}(\rho)$ und zeigen sie, dass $v_{k,l}$ die Differentialgleichung

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + (2l+2-\rho)\frac{d}{d\rho} - \left(l+1-\frac{1}{\lambda_{k,l}}\right)\right]v_{k,l}(\rho) = 0$$

erfüllt.

(d) [1 Punkt] Machen Sie einen Potenzreihenansatz $v_{k,l}(\rho) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p\rho^p$ und zeigen Sie, dass die Koeffizienten b_p die Rekursionsgleichung

$$p(2l+1+p)b_p = \left(l+p-\frac{1}{\lambda_{k,l}}\right)b_{p-1}$$

erfüllen, wobei $b_0 = 1$.

(e) [1 Punkt] Damit $u_{k,l}(\rho)$ eine physikalisch sinnvolle Lösung darstellt, muss die Potenzreihe in (d) für einen bestimmten Wert $p = k$ mit $k = 1, 2, ...$ abbrechen. Welche Bedingung muss daher $\lambda_{k,l}$ erfüllen, damit dann $b_k = 0$ gilt. Bestimmen Sie mit diesem Hinweis die Eigenenergien $E_{k,l}$. Geben Sie $u_{k,l}(r)$ für $\{k = 1, l = 0\}$, $\{k = 2, l = 0\}$ und $\{k = 1, l = 1\}$ an und skizzieren Sie die Funktionen $\frac{u_{k,l}(r)}{r}$.