Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Lösungen – Blatt 9
Besprechung 02.07.2014

---

1. Harmonischer Oszillator und Drehimpuls (4 Punkte)

Wir betrachten den zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$H = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_x^2 + \frac{P_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X_y^2.$$

(a) [1 Punkt] Zunächst zeigen wir, dass die neuen Operatoren $a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_x \pm i b_y)$ die Vertauschungsrelationen $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$ erfüllen. Mit den Auf- und Absteigeoperatoren $b_j^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X_j - \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P_j$ und $b_j = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}X_j + \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}P_j$ mit $j = x, y$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
a_+ a_+^\dagger - a_+^\dagger a_+ &= [b_x + i b_y][b_x + i b_y]^\dagger/2 - [b_x + i b_y]^\dagger [b_x + i b_y]/2 \\
&= [b_x + i b_y][b_x^\dagger - i b_y^\dagger]/2 - [b_x^\dagger - i b_y^\dagger][b_x + i b_y]/2 \\
&= \frac{1}{2}(b_x b_x^\dagger - b_x^\dagger b_x + b_y b_y^\dagger - b_y^\dagger b_y) = 1.
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
a_+ a_-^\dagger - a_-^\dagger a_+ &= [b_x + i b_y][b_x - i b_y]^\dagger/2 - [b_x - i b_y]^\dagger [b_x + i b_y]/2 \\
&= [b_x + i b_y][b_x^\dagger + i b_y^\dagger]/2 - [b_x^\dagger + i b_y^\dagger][b_x + i b_y]/2 \\
&= \frac{1}{2}(b_x b_x^\dagger - b_x^\dagger b_x - b_y b_y^\dagger + b_y^\dagger b_y) = 0.
\end{aligned}$$

Gleiches gilt für $[a_-, a_-^\dagger] = 1$ und $[a_-, a_+^\dagger] = 0$. Schauen wir uns nun den Hamilton-Operator an,

$$H = \hbar\omega(b_x^\dagger b_x + b_y^\dagger b_y + 1).$$

Einsetzen der neuen Operatoren a_+ und a_- liefert

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega([a_+ + a_-]^\dagger [a_+ + a_-]/2 + [a_+ - a_-]^\dagger [a_+ - a_-]/2 + 1) \\
&= \hbar\omega(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1)
\end{aligned}$$

Mit $N_+ |n_+\rangle = n_+ |n_+\rangle$ und $N_- |n_-\rangle = n_- |n_-\rangle$ erhalten wir

$$H |n_+, n_-\rangle = \hbar\omega(n_+ + n_- + 1) |n_+, n_-\rangle .$$

Definieren wir $n = n_+ + n_-$, so sind die Eigenenergien gegeben durch

$$E_n = \hbar\omega(n + 1).$$

Der Energieeigenwert E_0 ist nicht entartet, E_1 ist zweifach entartet, u.s.w.

$$\begin{array}{cc}
E_0 & |00\rangle \\
E_1 & |01\rangle\ |10\rangle \\
E_2 & |02\rangle\ |11\rangle\ |20\rangle \\
\vdots & \\
E_n & |0n\rangle\ |1n-1\rangle\ \ldots\ |n0\rangle
\end{array} \tag{1}$$

Wir sehen also, dass der Energieeigenwert E_n $n + 1$-fach entartet ist.

(b) [1 Punkt] Die drei Drehimpuls-Operatoren sind definiert durch

$$J_+ = \hbar\, a_+^\dagger a_-, \quad J_- = \hbar\, a_-^\dagger a_+, \quad J_z = \frac{\hbar}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-).$$

Wir betrachten die Kombinationen

$$\begin{aligned}
(J_+J_- - J_-J_+)/\hbar^2 &= a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_- \\
&= a_+^\dagger a_+(a_-^\dagger a_- + 1) - a_-^\dagger a_-(a_+^\dagger a_+ + 1) \\
&= a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_- \\
(J_zJ_+ - J_+J_z)/\hbar^2 &= \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)a_+^\dagger a_- - a_+^\dagger a_- \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-) \\
&= \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_- - a_-^\dagger a_- a_+^\dagger a_- - a_+^\dagger a_- a_+^\dagger a_+ + a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_-) \\
&= \frac{1}{2}(a_+^\dagger (1 + a_+^\dagger a_+) a_- - a_+^\dagger a_+^\dagger a_+ a_- - a_+^\dagger a_-^\dagger a_- a_- + a_+^\dagger(1 + a_-^\dagger a_-)a_-) \\
&= a_+^\dagger a_- = J_+/\hbar
\end{aligned}$$

Auf gleiche Weise finden wir $[J_z, J_-] = -\hbar J_-$.

(c) [1 Punkt] Zunächst wissen wir aus Aufgabe 3 von Blatt 8, dass

$$\boldsymbol{J}^2 = \frac{1}{2}(J_+J_- + J_-J_+) + J_z^2$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{J}^2/\hbar^2 &= \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_- a_-^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_+ a_+^\dagger a_-) + \frac{1}{4}(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)^2 \\
&= \frac{1}{2}(a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + a_+^\dagger a_+ + a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_- + a_-^\dagger a_-) \\
&+ \frac{1}{4}(a_+^\dagger a_+ a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- a_-^\dagger a_- - 2a_+^\dagger a_+ a_-^\dagger a_-) \\
&= \frac{1}{4}(2N_+N_- + 2N_+ + 2N_- + N_+^2 + N_-^2) \\
&= \frac{N_+ + N_-}{2}\left(\frac{N_+ + N_-}{2} + 1\right) = \frac{N}{2}\left(\frac{N}{2} + 1\right).
\end{aligned}$$

Desweiteren ergibt sich aus der Definition von J_z direkt

$$J_z = \frac{\hbar}{2}(N_+ - N_-).$$

Da N_+ und N_- mit H vertauschen, tuen dies auch $\boldsymbol{J}^2$ und J_z, also $[\boldsymbol{J}^2, H] = 0$ und $[J_z, H] = 0$. H, $\boldsymbol{J}^2$ und J_z bilden einen Satz vollständig kommutierender Observablen. Damit können wir die Eigenzustände des Hamilton-Operators auch durch die Quantenzahlen j und m ausdrücken. Wir sehen, dass

$$\begin{aligned}
j &= \frac{n_+ + n_-}{2} \\
m &= \frac{n_+ - n_-}{2}
\end{aligned}$$

Bemerkung: Da n_+ und n_- ganzzahlig sind, können j und m zwangsläufig nur halbzahlige und ganzzahlige Werte annehmen!

Wir sehen also, dass $n_+ = j + m$ und $n_- = j - m$,

$$\begin{aligned}
|n_+, n_-\rangle &= \frac{(a_+^\dagger)^{n_+}}{\sqrt{(n_+)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{n_-}}{\sqrt{(n_-)!}} |0\rangle \\
|j, m\rangle &= \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}} \frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}} |0\rangle\,.
\end{aligned}$$

(d) [1 Punkt] Im Folgenden schauen wir uns die Wirkung von J_+ und K_+ auf die Eigenzustände $|j,m\rangle$:

$$J_+/\hbar\,|j,\,m\rangle = a_+^\dagger a_- \frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}\,|0\rangle$$

$$= \frac{(a_+^\dagger)^{j+m+1}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{a_-(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}\,|0\rangle \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Betrachten wir zunächst

$$\begin{aligned}
a_-(a_-^\dagger)^{j-m} &= a_-a_-^\dagger(a_-^\dagger)^{j-m-1} = (a_-^\dagger a_- + 1)(a_-^\dagger)^{j-m-1}\\
&= a_-^\dagger a_- a_-^\dagger(a_-^\dagger)^{j-m-2} + (a_-^\dagger)^{j-m-1}\\
&= a_-^\dagger(a_-^\dagger a_- + 1)(a_-^\dagger)^{j-m-2} + (a_-^\dagger)^{j-m-1}\\
&= (a_-^\dagger)^2 a_-(a_-^\dagger)^{j-m-2} + 2(a_-^\dagger)^{j-m-1}\\
&\;\;\vdots\\
&= (a_-^\dagger)^l a_-(a_-^\dagger)^{j-m-l} + l(a_-^\dagger)^{j-m-1}
\end{aligned}$$

Mit $l = j-m$ folgt

$$a_-(a_-^\dagger)^{j-m} = (a_-^\dagger)^{j-m}a_- + (j-m)(a_-^\dagger)^{j-m-1}.$$

Der Operator a_- angewandt aufs Vakuum liefert gerade null, d.h. $a_-\,|0\rangle = 0$. Für (2) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
J_+\,|j,\,m\rangle &= \hbar(j-m)\frac{(a_+^\dagger)^{j+m+1}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m-1}}{\sqrt{(j-m)!}}\,|0\rangle\\
&= \hbar\sqrt{(j-m)(j+m+1)}\frac{(a_+^\dagger)^{j+m+1}}{\sqrt{(j+m+1)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m-1}}{\sqrt{(j-m-1)!}}\,|0\rangle\\
&= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,|j,\,m+1\rangle\,.
\end{aligned}$$

Mit $K_+ = a_+^\dagger a_-^\dagger$ lässt sich außerdem zeigen, dass

$$\begin{aligned}
K_+\,|j,\,m\rangle &= \hbar a_+^\dagger a_-^\dagger\frac{(a_+^\dagger)^{j+m}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m}}{\sqrt{(j-m)!}}\,|0\rangle\\
&= \hbar\frac{(a_+^\dagger)^{j+m+1}}{\sqrt{(j+m)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m+1}}{\sqrt{(j-m)!}}\,|0\rangle\\
&= \hbar\sqrt{(j-m+1)(j+m+1)}\frac{(a_+^\dagger)^{j+m+1}}{\sqrt{(j+m+1)!}}\frac{(a_-^\dagger)^{j-m+1}}{\sqrt{(j-m+1)!}}\,|0\rangle\\
&= \hbar\sqrt{(j-m+1)(j+m+1)}\,|j+1,\,m\rangle\,.
\end{aligned}$$

2. Fock-Darwin-Spektrum (2 Punkte)

Wir betrachten den zweidimensionalen harmonischen Oszillator im Magnetfeld, d.h.

$$\begin{aligned}
H &= \sum_{j=x,y}\frac{(P_j - qA_j)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2X_j^2,\\
&= \frac{(P_x + \frac{qB}{2}X_y)^2}{2m} + \frac{(P_y - \frac{qB}{2}X_x)^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(X_x^2 + X_y^2)\\
&= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{P_y^2}{2m} + \left[\frac{1}{2}m\omega^2 + \left(\frac{qB}{2}\right)^2\frac{1}{2m}\right](X_x^2 + X_y^2) + \frac{qB}{2m}(P_xX_y - P_yX_x)
\end{aligned}$$

Wir definieren die Kreisfrequenz $\tilde{\omega}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\tilde{\omega}^2 &= \frac{1}{2}m\omega^2 + \frac{q^2B^2}{8m}\\ \tilde{\omega}^2 &= \omega^2 + \frac{q^2B^2}{4m^2} = \omega^2 + \frac{\omega_c^2}{4}\end{aligned}$$

mit der Zyklotronfrequenz $\omega_c = eB/m$ für das Elektron mit Ladung $q = -e$, Damit lässt sich der Hamilton-Operator ausdrücken durch die Operatoren $a_\pm$. Wir erkennen unteranderem, dass $L_z = -(P_xX_y - P_yX_x) = \hbar(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)/2$ und erhalten

$$\begin{aligned}H &= \hbar\tilde{\omega}(a_+^\dagger a_+ + a_-^\dagger a_- + 1) + \frac{1}{4}\hbar\omega_c(a_+^\dagger a_+ - a_-^\dagger a_-)\\ &= \hbar\tilde{\omega}(N_+ + N_- + 1) + \frac{1}{4}\hbar\omega_c(N_+ - N_-),\end{aligned}$$

wobei $\omega_c = \frac{eB}{m}$. Mit $N = N_+ + N_-$ und $2M = N_+ - N_-$ und den entsprechenden Quantenzahlen n und m sind die Eigenenergien gegeben durch

$$E_{nm} = \hbar\tilde{\omega}(n+1) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c m \tag{4}$$

Alternativ können wir die Quantenzahl n durch j ausdrücken,

$$E_{jm} = \hbar\tilde{\omega}(2j+1) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c m \tag{5}$$

Bemerkung: In der Literatur wird oft eine neue Quantenzahl $\tilde{n}$ eingeführt,

$$\tilde{n} = \min(n_+, n_-) = \frac{n_+ + n_- - |n_+ - n_-|}{2} = \frac{n - 2|m|}{2}$$

und damit

$$E_{\tilde{n},m} = \hbar\tilde{\omega}(2\tilde{n} + 2|m| + 1) + \frac{1}{2}\hbar\omega_c m$$

In der Abbildung 1(a) sehen wir das entsprechende Spektrum. Hier entsprechen n und l gerade unseren Quantenzahlen $\tilde{n}$ und $-2m$.

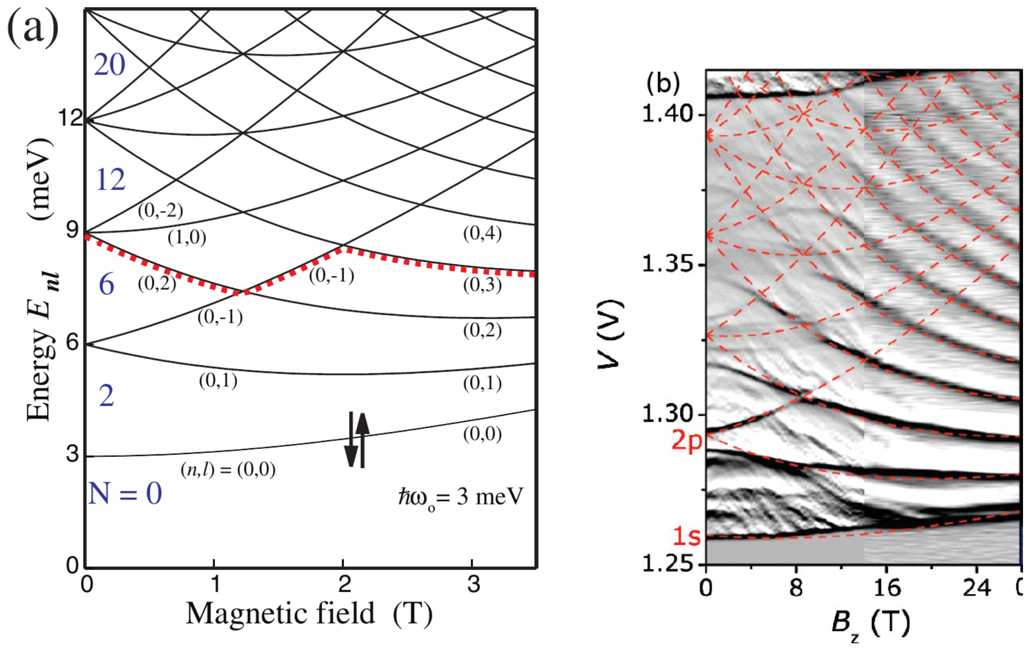

Abbildung 1: (a) Theoretisches Fock-Darwin-Spektrum mit $\omega = \omega_0$ (aus Kouwenhoven *et al.*, Rep. Prog. Phys. 64 (2001) 701736). (b) Experimentelle Daten (dI/dV Farbplot) aus Makarovsky *et al.* Phys. Rev. Lett. 101, 226807 (2008)

3. Radialfunktionen des Wasserstoffatoms (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde mit dem Separationsansatz $\phi(r,\theta,\varphi) \sim Y_{lm}(\theta,\varphi)\frac{u_{k,l}(r)}{r}$ die Radialgleichung für $u_{k,l}$ hergeleitet,

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{e^2}{r}\right] u_{k,l}(r) = E_{k,l}u_{k,l}(r). \tag{6}$$

l entspricht der Drehimpulsquantenzahl. Die Eigenenergien hängen sowohl von dieser Quantenzahl als auch von einer weiteren, nämlich k, ab. Im Aufgabenteil (e) wird dieses k über die Bedingung, dass der dort verwendete Potenzreihenansatz abbricht, definiert.

(a) [0.5 Punkte] *Schreiben Sie Gl. (6) mit der dimensionslosen Variablen $\rho = 2\kappa r$ und dem dimensionslosen Parameter $\lambda_{k,l}^{-1} = \frac{1}{\kappa a_0}$, wobei $\kappa = \sqrt{\frac{-2mE_{k,l}}{\hbar^2}}$ und $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$.*

Als erster Schritt substitutieren wir $\rho = 2\kappa r$

$$\left[-\frac{\hbar^2(2\kappa)^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \frac{\hbar^2(2\kappa)^2}{2m}\frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{e^2(2\kappa)}{\rho}\right] u_{k,l}(r) = E_{k,l}u_{k,l}(r) \tag{7}$$

bringen die dimensionsbehafteten Größen auf die rechte Seite

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{me^2}{\hbar^2\kappa}\frac{1}{\rho}\right] u_{k,l}(\rho) = -\frac{2m}{\hbar^2(2\kappa)^2}E_{k,l}u_{k,l}(\rho) \tag{8}$$

und verwenden die Definition von $\lambda_{k,l}^{-1}$ und κ.

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\lambda_{k,l}^{-1}}{\rho}\right] u_{k,l}(\rho) = \frac{1}{4}u_{k,l}(\rho) \tag{9}$$

(In der Praxis kennt man die Parameter noch nicht, sondern definiert sie an dieser Stelle entsprechend um die Gleichung auf eine ansprechende Form zu bringen.)

(b) [0.5 Punkte] *Zeigen Sie, dass im Limes $\rho \to \infty$ die Lösungen näherungsweise gegeben sind durch $u_{k,l}(\rho) = \exp(\pm\rho/2)$.*

Im Limes $\rho \to \infty$ verschinden die Terme $\propto 1/\rho$ und $\propto 1/\rho^2$, die Differentialgleichung reduziert sich dadurch auf

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} u_{k,l}(\rho) = \frac{1}{4} u_{k,l}(\rho) \tag{10}$$

mit den Lösungen $u_{k,l}(\rho) = A\exp(\rho/2)$ und $u_{k,l}(\rho) = B\exp(-\rho/2)$. Nur letztere ist eine physikalische Lösung und wird daher im Ansatz verwendet.

(c) [1 Punkt] *Machen Sie den Ansatz $u_{k,l}(\rho) = \rho^{l+1}e^{-\rho/2}v_{k,l}(\rho)$ und zeigen sie, dass $v_{k,l}$ die Differentialgleichung*

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + (2l+2-\rho)\frac{d}{d\rho} - (l+1-\lambda_{k,l}^{-1})\right] v_{k,l}(\rho) = 0$$

erfüllt.

Wir setzen den Ansatz in (9) ein und ziehen mit

$$\partial_\rho \rho^{l+1}e^{-\rho/2} = \rho^{l+1}e^{-\rho/2}\Big(\frac{l+1}{\rho} - \frac{1}{2} + \partial_\rho\Big), \quad \partial_\rho^2 \rho^{l+1}e^{-\rho/2} = \rho^{l+1}e^{-\rho/2}\Big(\frac{l+1}{\rho} - \frac{1}{2} + \partial_\rho\Big)^2$$

die Funktion $\rho^{l+1}e^{-\rho/2}$ nach vorne und divieren sie ab:

$$\Big(\frac{l(l+1)}{\rho^2} - \frac{l+1}{\rho} + \frac{1}{4} + \frac{2(l+1)-\rho}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + \frac{\lambda_{k,l}^{-1}}{\rho} - \frac{1}{4}\Big)v_{k,l}(\rho) = 0. \tag{11}$$

Nach umsortieren und Multiplikation mit ρ erhält man schliesslich

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + (2l+2-\rho)\frac{d}{d\rho} - (l+1-\lambda_{k,l}^{-1})\right] v_{k,l}(\rho) = 0 \tag{12}$$

(d) [1 Punkt] *Machen Sie einen Potenzreihenansatz $v_{k,l}(r) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p\rho^p$ und zeigen Sie, dass die Koeffizienten b_p die Rekursionsgleichung*

$$p(2l+1+p)b_p = (l+p-\lambda_{k,l}^{-1})b_{p-1}$$

mit $b_0 = 1$ erfüllen.

Wir setzen den Potenzreihenansatz in (12) ein und betrachten zuerst die einzelnen Terme

$$\rho\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}v_{k,l}(\rho) = \sum_{p=1}^{\infty} p(p-1)b_p\rho^{p-1} \tag{13}$$

$$(2l+2-\rho)\frac{d}{d\rho}v_{k,l}(\rho) = \sum_{p=1}^{\infty}[p(2l+2)b_p - (p-1)b_{p-1}]\rho^{p-1} \tag{14}$$

$$-(l+1-\lambda_{k,l}^{-1})v_{k,l}(r) = -\sum_{p=1}^{\infty}(l+1-\lambda_{k,l}^{-1})b_{p-1}\rho^{p-1}. \tag{15}$$

womit sich für (12) ergibt:

$$\sum_{p=1}^{\infty}[p(p-1)b_p + p(2l+2)b_p - (p-1)b_{p-1} - (l+1-\lambda_{k,l}^{-1})b_{p-1}]\rho^{p-1} = 0. \tag{16}$$

Damit (16) erfüllt ist muss der Koeffizient für jede Potenz ρ^{p-1} verschwinden, womit man die Rekursionsgleichung

$$p(2l+1+p)b_p = (l-\lambda_{k,l}^{-1}+p)b_{p-1} \tag{17}$$

erhält.

(e) [1 Punkt] *Damit* $u_{k,l}(\rho)$ *eine physikalisch sinnvolle Lösung darstellt, muss die Potenzreihe in (d) für einen bestimmten Wert* $p = k$ *mit* $k = 1, 2, ...$ *abbrechen. Welche Bedingung muss daher* $\lambda_{k,l}$ *erfüllen, damit dann* $b_k = 0$ *gilt. Bestimmen Sie mit diesem Hinweis die Eigenenergien* $E_{k,l}$. *Geben Sie* $u_{k,l}(r)$ *für* $\{k = 1, l = 0\}$, $\{k = 2, l = 0\}$ *und* $\{k = 1, l = 1\}$ *an und skizzieren Sie die Funktionen.*

Betrachtet man die Rekursionsgleichung, sieht man das für $p \to \infty$ für die Koeffizienten $b_p \sim b_{p-1}/p$ gilt. Die Reihe divergiert also wie $e^\rho = \sum_p \rho^p/(p!)$. Damit wird stattdessen ein Polynom erhalten muss die Reihe für eine $p_{max} = k$ mit $k = 1, 2, ...$ abbrechen. Damit $b_{p_{max}} = 0$ gilt, muss nach (17) für $\lambda_{k,l}^{-1}$ gelten:

$$\lambda_{k,l}^{-1} = l + p_{max} = l + k \qquad k = 0, 1, 2, \dots, \infty \tag{18}$$

Gehen wir zurück zur Definition von $\lambda_{k,l}^{-1}$ sehen wir, dass die Energie damit durch

$$E_{k,l} = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{mc^2}{2(\lambda_{k,l}^{-1})^2} = -\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{mc^2}{2(l+k)^2} \tag{19}$$

gegeben ist. Für die Koeffizienten b_p erhalten wir dementsprechend

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 \\
b_1 &= \frac{1-k}{2l+2} \\
b_2 &= \frac{1}{2}\frac{2-k}{2l+3}\frac{1-k}{2l+2} \\
&\vdots \\
b_p &= \frac{p-k}{2l+p+1}\frac{1}{p}b_{p-1}
\end{aligned}$$

Die Wellenfunktionen

$$u_{k,l}(r) = e^{-\kappa r}(2\kappa r)^{l+1} v_{k,l} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{a_0^{-1}}{\lambda_{k,l}^{-1}} = \frac{a_0^{-1}}{l+k} \tag{20}$$

sind für

$$\begin{aligned}
k = 1,\, l = 0: &\qquad u_{k,l}(r) = e^{-r/a_0}\frac{2r}{a_0} \\
k = 2,\, l = 0: &\qquad u_{k,l}(r) = e^{-r/2a_0}\frac{r}{a_0}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right) \\
k = 1,\, l = 1: &\qquad u_{k,l}(r) = e^{-r/2a_0}\left(\frac{r}{a_0}\right)^2
\end{aligned}$$

Der radiale Wellenanteil wird in der Literatur gemeinhin als $R_{k,l}$ bezeichnet und unterscheidet sich von $u_{k,l}$ lediglich durch einen Faktor $1/r$, d.h. $R_{k,l} \sim u_{k,l}/r$,

$$\begin{aligned}
k = 1,\, l = 0: &\qquad R_{k,l} = 2(a_0)^{-3/2}e^{-r/a_0} \\
k = 2,\, l = 0: &\qquad R_{k,l} = 2(2a_0)^{-3/2}\left(1 - \frac{r}{2a_0}\right)e^{-r/2a_0} \\
k = 1,\, l = 1: &\qquad R_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{3}}(2a_0)^{-3/2}\frac{r}{a_0}e^{-r/2a_0}
\end{aligned}$$

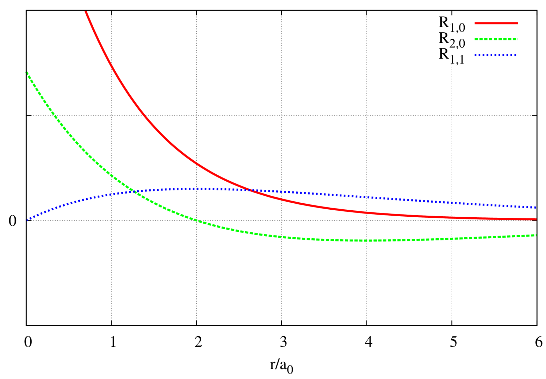

Abbildung 2: Radialwellenfunktionen.