

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Lösungen – Blatt 10
Besprechung 09.07.2014

1. Spin im elektromagnetischen Feld

(4 Punkte)

Wir betrachten einen Spin- $\frac{1}{2}$

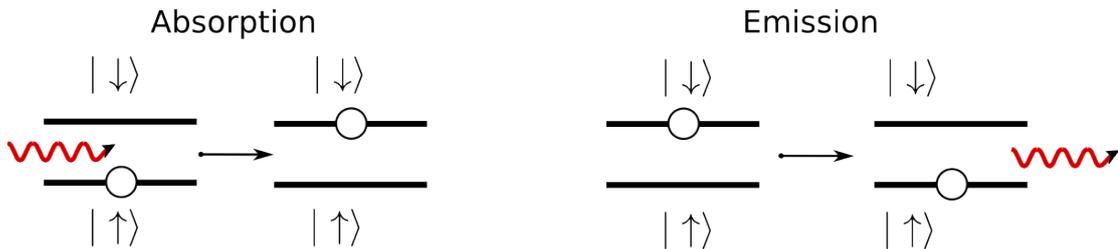
$$\hat{H}_{\text{spin}} = -\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z$$

in einem elektromagnetischen Resonator mit Frequenz ω . Die Energiequanten $\hbar\omega$ entsprechen gerade der Energiedifferenz von Grundzustand und angeregten Zustand des Spin-Systems. Der Hamiltonoperator für den Resonator ist gegeben durch

$$\hat{H}_{\text{res}} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right).$$

Die Kopplung von dem Spin an das elektromagnetische Feld kann effektiv geschrieben werden als

$$H_{\text{spin-res}} = g(\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+).$$



Wir sehen unter anderem, dass $g\hat{a}\hat{\sigma}_-|\uparrow\rangle|n+1\rangle = g\sqrt{n+1}|\downarrow\rangle|n\rangle$, d.h. die Anregung des Spin-Systems geht einher mit der Absorption eines Energiequants des elektromagnetischen Feldes, eines Photons (siehe Abbildung). Umgekehrt kann der Spin von dem angeregten in den Grundzustand fallen und dabei ein Photon emittieren. Insgesamt ist der Hamilton-Operator gegeben durch

$$\hat{H} = -\frac{\hbar\omega}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right) + g(\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger\hat{\sigma}_+). \quad (1)$$

Der Hilbertraum des Systems wird aufgespannt durch die Zustände $|\uparrow\rangle\{|n\rangle\}$ und $|\downarrow\rangle\{|n\rangle\}$ mit $\{|n\rangle\} = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots\}$.

(a) [2 Punkte] In der Basis

$$\{|\uparrow\rangle|0\rangle, |\uparrow\rangle|1\rangle, |\downarrow\rangle|0\rangle, |\uparrow\rangle|2\rangle, |\downarrow\rangle|1\rangle, \dots, |\uparrow\rangle|n+1\rangle, |\downarrow\rangle|n\rangle, \dots\}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle\uparrow, 0|\hat{H}|\uparrow, 0\rangle &= -\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} = 0 \\ \langle\uparrow, n+1|\hat{H}|\uparrow, n+1\rangle &= -\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\left(n+1 + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega(n+1) \\ \langle\downarrow, n|\hat{H}|\downarrow, n\rangle &= \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega(n+1) \end{aligned}$$

Die einzigen nichtverschwindenden nebendiagonalen Elemente sind gegeben durch

$$\langle \uparrow, n+1 | \hat{H} | \downarrow, n \rangle = g\sqrt{n+1} = \langle \downarrow, n | \hat{H} | \uparrow, n+1 \rangle.$$

Damit erhalten wir

$$\hat{H}_{n+1} = \begin{pmatrix} \langle \uparrow, n+1 | \hat{H} | \uparrow, n+1 \rangle & \langle \uparrow, n+1 | \hat{H} | \downarrow, n \rangle \\ \langle \downarrow, n | \hat{H} | \uparrow, n+1 \rangle & \langle \downarrow, n | \hat{H} | \downarrow, n \rangle \end{pmatrix} = \hbar\omega(n+1) + g\sqrt{n+1}\hat{\sigma}_x$$

und

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \langle \uparrow, 0 | \hat{H} | \uparrow, 0 \rangle & 0 & & & & \\ & \hat{H}_1 & 0 & & & \\ & 0 & \hat{H}_2 & 0 & & \\ & & & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & \hat{H}_n & 0 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}. \quad (2)$$

- (b) [1 Punkt] Die Tatsache, dass $\langle \downarrow, n | \hat{H} | \uparrow, n+1 \rangle$ die einzigen nichtverschwindenden Nebendiagonalelemente sind, impliziert schon, dass die Anzahl an Anregungen im System (für dieses Beispiel wären es gerade $n+1$) erhalten, d.h. zeitunabhängig sind,

$$i\hbar \frac{d\hat{N}_e^H}{dt} = -[\hat{H}, \hat{N}_e^H] = 0.$$

Zur Auswertung des Kommutators benötigen wir noch die Relationen

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = g[\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+, \hat{a}^\dagger \hat{a}] = g(\hat{a}\hat{\sigma}_- - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+) \quad (3)$$

$$[\hat{H}, |\downarrow\rangle \langle \downarrow|] = g[\hat{a}\hat{\sigma}_- + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+, |\downarrow\rangle \langle \downarrow|] = -g(\hat{a}|\downarrow\rangle \langle \uparrow| - \hat{a}^\dagger |\uparrow\rangle \langle \downarrow|) = -g(\hat{a}\hat{\sigma}_- - \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+) \quad (4)$$

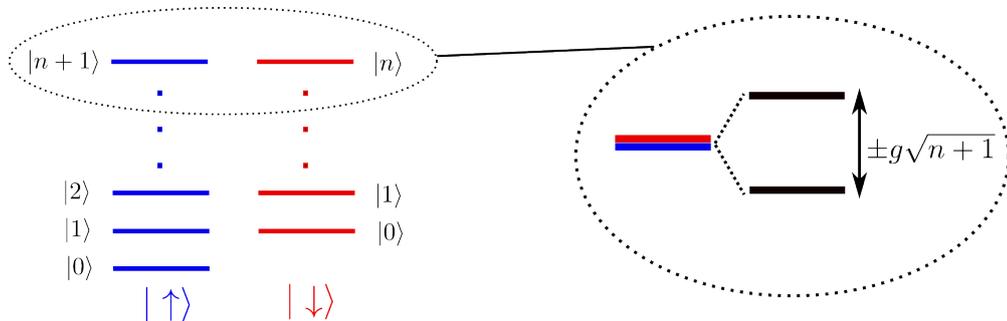
Damit ergibt sich

$$[\hat{H}, \hat{N}_e^H] = [\hat{H}, \hat{a}^\dagger \hat{a}] + [\hat{H}, |\downarrow\rangle \langle \downarrow|] = 0. \quad (5)$$

Da damit aber $\frac{d\hat{N}_e^H}{dt} = 0$ ist, ist \hat{N}_e^H eine Erhaltungsgröße, d.h. die Anregungen im System sind erhalten, weswegen der Hamilton-Operator eine Block-diagonale Form annimmt, mit Blöcken, die jeweils festem N_e zugeordnet werden können.

- (c) [1 Punkt] Die Eigenenergien und Zustände des Systems erhalten wir durch Diagonalisierung von \hat{H}_n ,

$$E_n = \hbar\omega(n+1) \pm g\sqrt{n+1}. \quad (6)$$



Die Kopplung g führt also dazu, dass es zu einer Aufspaltung der ursprünglich entarteten Zustände $|\uparrow\rangle |n+1\rangle$ und $|\downarrow\rangle |n\rangle$ kommt.

2. Wasserstoffatom im klassischen Strahlungsfeld

(3 Punkte)

Ein Wasserstoffatom befindet sich in einem zeitabhängigen elektrischen Feld. Die Wechselwirkung mit diesem elektrischen Feld in der sogenannten Dipolnäherung ist gegeben durch

$$H'(t) = e\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}} \cos(\omega t)$$

Im Folgenden wollen wir uns Übergänge von dem Grundzustand des Wasserstoffatoms, $|nlm\rangle = |100\rangle$ in höher angeregte Zustände $|2lm\rangle$ betrachten. Um die Übergangsraten $\Gamma_{|100\rangle \rightarrow |2lm\rangle}$ zu berechnen verwenden wir (ohne Herleitung) Fermi's Goldene Regel,

$$\Gamma_{|100\rangle \rightarrow |2lm\rangle} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle 2lm | e\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}} | 100 \rangle|^2 \delta(E_{2lm} - E_{100} - \hbar\omega). \quad (7)$$

Hierbei sind E_{nlm} die Eigenenergien des Wasserstoffatoms und die Eigenfunktionen des Wasserstoffatoms sind gegeben durch $\langle r\theta\varphi | nlm \rangle = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi)$. Desweiteren sind die Kugelflächenfunktionen für $l = 1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} Y_0^0 &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \\ Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos(\theta), \\ Y_1^{-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{-i\varphi}, \\ Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin(\theta) e^{i\varphi}. \end{aligned}$$

Damit kann der Wechselwirkungsterm parametrisiert werden

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} &= [E_x r \sin(\theta) \cos(\varphi) + E_y \sin(\theta) r \sin(\varphi) + E_z r \cos(\theta)], \\ &= r \left(E_x \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{2} [-Y_1^1 + Y_1^{-1}] + E_y \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{2i} [-Y_1^1 - Y_1^{-1}] + E_z \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 \right), \\ &= r \left(-Y_1^1 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x - iE_y] + Y_1^{-1} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x + iE_y] + E_z \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^0 \right), \\ &= r \langle \theta\varphi | \left(-\sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x - iE_y] |l=1, m=1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x + iE_y] |l=1, m=-1\rangle \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_z |l=1, m=0\rangle \right) \end{aligned}$$

Damit können wir nun die Matrixelemente $\langle 2lm | e\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}} | 100 \rangle$ bestimmen,

$$\begin{aligned} \langle 2lm | e\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}} | 100 \rangle &= e \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi \langle 2lm | r\theta\varphi \rangle \langle r\theta\varphi | \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{R}} | 100 \rangle, \\ &= e \int_0^\infty dr r^2 \int_{-1}^1 d\cos(\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi R_{2l}(r) R_{10}(r) [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* Y_0^0(\theta, \varphi) \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}, \\ &= \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \left(e \int_0^\infty dr r^3 R_{2l}(r) R_{10}(r) \right) \\ &\quad \times \left(-\sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x - iE_y] \langle l, m | 1, 1 \rangle + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x + iE_y] \langle l, m | 1, -1 \rangle + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_z \langle l, m | 1, 0 \rangle \right), \\ &= \delta_{l,1} e \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \frac{a_0}{\sqrt{6}} \frac{2^8}{3^4} \left(-\sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x - iE_y] \delta_{m,1} + \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [E_x + iE_y] \delta_{m,-1} + \sqrt{\frac{4\pi}{3}} E_z \delta_{m,0} \right). \end{aligned}$$

Für Fermi's Goldene Regel ergibt sich

$$\Gamma_{|100\rangle \rightarrow |2lm\rangle} = \frac{2\pi}{\hbar} \delta_{l,1} e^2 \frac{a_0^2}{2} \frac{2^{16}}{3^{10}} \left(\frac{1}{2} [E_x^2 + E_y^2] \delta_{m,1} + \frac{1}{2} [E_x^2 + E_y^2] \delta_{m,-1} + E_z^2 \delta_{m,0} \right)$$

Die Auswahlregeln sind entsprechend: Die Übergänge zwischen Grundzustand und angeregtem Zustand können nur dann stattfinden, wenn der angeregte Zustand die Drehimpulsquantenzahl $l = 1$ hat. Desweiteren finden wir, dass die z-Komponente des elektrischen Feldes Übergänge $m = 0 \rightarrow m = 0$ induziert. Die x- und y-Komponenten hingegen induzieren Übergänge $m = 0 \rightarrow m = \pm 1$.

3. Stern-Gerlach-Experiment mit Präzision (3 Punkte)

Nach dem ersten Stern-Gerlach-Apparat ist der Zustand der Teilchen entweder $|\uparrow\rangle$ (für z.B. den oberen Strahl) und $|\downarrow\rangle$ (für den unteren Strahl). Während der Flugzeit von einem zum anderen Apparat entwickeln sich die Zustände zeitlich in dem in y-Richtung angelegten Magnetfeld,

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle &\rightarrow |\psi_{\uparrow}(r)\rangle = \frac{e^{i\omega t/2}}{2} (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle) + \frac{e^{-i\omega t/2}}{2} (|\uparrow\rangle - i|\downarrow\rangle) = \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) |\uparrow\rangle - \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right) |\downarrow\rangle \\ |\downarrow\rangle &\rightarrow |\psi_{\downarrow}(r)\rangle = \cos\left(\frac{\omega}{2}t\right) |\downarrow\rangle + \sin\left(\frac{\omega}{2}t\right) |\uparrow\rangle \end{aligned}$$

mit $\omega = \mu_B B / \hbar$. Der zweite Stern-Gerlach-Apparat spaltet die Zustände wieder auf in die Zustände

$$\begin{aligned} |\uparrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \\ |\downarrow\rangle_x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \end{aligned}$$

Dementsprechend sind die bedingten Wahrscheinlichkeiten, diese nach der Flugzeit T zu messen, gegeben durch

$$\begin{aligned} P(\uparrow_x, \uparrow) &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle \uparrow | + \langle \downarrow |) (\cos(\frac{\omega}{2}T) |\uparrow\rangle - \sin(\frac{\omega}{2}T) |\downarrow\rangle) \right|^2 = \frac{1}{2} (\cos(\frac{\omega}{2}T) - \sin(\frac{\omega}{2}T))^2 = \frac{1}{2} (1 - \sin(\omega T)) \\ P(\downarrow_x, \uparrow) &= \frac{1}{2} (1 + \sin(\omega T)) \\ P(\uparrow_x, \downarrow) &= \frac{1}{2} (1 + \sin(\omega T)) \\ P(\downarrow_x, \downarrow) &= \frac{1}{2} (1 - \sin(\omega T)) \end{aligned}$$

Die Intensitäten der Punkte auf dem Detektorschirm sind gerade proportional zu diesen Wahrscheinlichkeiten.