Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Blatt 11
Besprechung 16.07.2014

---

1. Wechselwirkende Spins (3 Punkte)

Betrachten Sie zwei wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit folgendem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -J(\hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)} + \hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}) \tag{1}$$

(a) [1 Punkt] Schreiben Sie den Hamilton-Operator als 4×4 Matrix in den vier Basiszuständen $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{S}_z^{(1)}$ und $\hat{S}_z^{(2)}$ bezeichnen

(b) [2 Punkte] Das System sei zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle\,. \tag{2}$$

Schreiben Sie den Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ als 4×4-Matrix in den Basiszuständen $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$.
Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$.

2. Messprozess an zwei Spins (3 Punkte)

Betrachten Sie ein System von zwei wechselwirkenden Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit den 4 Basiszuständen $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{S}_z^{(i)}$ bezeichnen.

Das System sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow,\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\uparrow,\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\downarrow,\downarrow\rangle \tag{3}$$

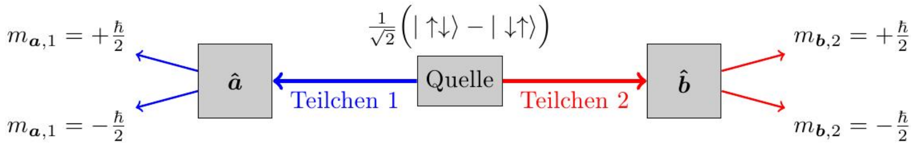
(a) [1 Punkt] Zur Zeit $t = 0$ werde $\hat{S}_z^{(1)}$ gemessen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit den Messwert $-\frac{\hbar}{2}$ zu erhalten? Was ist in diesem Fall der Zustand nach der Messung? Wenn direkt danach $\hat{S}_x^{(1)}$ gemessen wird, welche Ergebnisse sind möglich und mit welchen Wahrscheinlichkeiten?

(b) [1 Punkt] Wenn gleichzeitig $\hat{S}_z^{(1)}$ und $\hat{S}_z^{(2)}$ gemessen werden, was ist Wahrscheinlichkeit entgegengesetzte bzw. gleiche Werte zu finden?

(c) [1 Punkt] Berechnen Sie $\langle\hat{\mathbf{S}}^{(1)}\rangle$ und $\langle\hat{\mathbf{S}}^{(2)}\rangle$. Zeigen Sie, dass die Beträge dieser Vektoren kleiner sind als $\hbar/2$. Für welche Zustände wäre der Betrag gleich $\hbar/2$?

3. Bell'sche Ungleichung (4 Punkte)

Wir betrachten eine Quelle, die paarweise zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem Spin-Singulett-Zustand $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$ in entgegengesetzte Richtungen aussendet. Weit von der Quelle entfernt befinden sich zwei Stern-Gerlach-Apparate, die die Spins der beiden Teilchen in den Richtungen $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ bzw. $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ messen. Die Observablen die gemessen werden, sind durch die Operatoren $\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}} = \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ und $\hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{S}}^{(2)}$ gegeben. Die möglichen Messwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$ des Teilchens 1 seien mit $m_{\mathbf{a},1} = \pm\frac{\hbar}{2}$ bezeichnet, die des Teilchens 2 mit $m_{\mathbf{b},2} = \pm\frac{\hbar}{2}$ (siehe Abbildung).



(a) [2 Punkt] Berechnen Sie die kombinierten Wahrscheinlichkeiten

$$P(m_{\mathbf{a},1}, m_{\mathbf{b},2}) = |\langle m_{\mathbf{a},1}, m_{\mathbf{b},2}|S\rangle|^2, \tag{4}$$

wobei $|m_{\mathbf{a},1}, m_{\mathbf{b},2}\rangle$ die Eigenzustände der Observablen $\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}}$ und $\hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}}$ mit Eigenwerten $m_{\mathbf{a},1}$ und $m_{\mathbf{b},2}$ sind, als Funktion des Winkels θ zwischen den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Hinweis:

Wählen Sie die Richtungen von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ geschickt, und drücken Sie die Eigenzustände von $\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}}$ und $\hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}}$ durch die Eigenzustände von $\hat{S}_z$ aus.

(b) [1 Punkt] Zeigen Sie, dass der normierte Erwartungswert der Observablen $\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}} \cdot \hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}}$ für den Singulett-Zustand durch

$$E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \frac{4}{\hbar^2} \langle S|\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}} \cdot \hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}}|S\rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\cos\theta \tag{5}$$

gegeben ist, wobei θ der Winkel zwischen den Achsen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.

(c) [1 Punkt] Nehmen wir nun an, dass die Messgeräte zwei Einstellungen haben: Der Spin des ersten Teilchens kann entweder entlang der Richtung $\mathbf{a}$ oder entlang der Richtung $\mathbf{a}'$ gemessen werden. ähnlich kann auch der Spin des zweiten Teilchens entweder entlang der Richtung $\mathbf{b}$ oder $\mathbf{b}'$ gemessen werden. Das Experiment wird vielfach, mit verschiedenen Kombinationen der Richtungen, durchgeführt. Am Ende werden die Daten in eine Funktion

$$C = E(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - E(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + E(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \tag{6}$$

zusammengefasst. Es kann gezeigt werden, dass für eine klassische Theorie die Ungleichung

$$|C| \leq 2 \tag{7}$$

gelten muss. Dies ist die Bell'sche Ungleichung in der Form von Clauser, Horne, Shimony und Holt (CHSH-Ungleichung). Zeigen Sie, dass man in der quantenmechanischen Theorie die Richtungen $\mathbf{a}$,$\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}$,$\mathbf{b}'$ so wählen kann, dass die Ungleichung verletzt wird.

Anmerkung:

Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung wurde mehrfach experimentell an Quantensystemen nachgewiesen und beweist somit, dass es dafür keine unterliegende klassische Theorie geben kann.

Klausur am 17.07 von 17:30 - 19:30 Uhr
Einteilung entsprechend der Anfangsbuchstaben der Nachnamen:

A-R:	Gerthsen HS
S-Z:	HS-37

- Bringen Sie bitte Ihren Studentenausweis mit.
- Eine Anmeldung per Qispos ist notwendig!
  (Falls dies nicht möglich ist, eine E-Mail an die Übungsleiter)
- Als Hilfsmittel ist ein doppelseitiges, handbeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt.