Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I   SS 14

Prof. Dr. Gerd Schön
Andreas Heimes, Dr. Andreas Poenicke

Lösungen – Blatt 11
Besprechung 16.07.2014

---

1. Wechselwirkende Spins (3 Punkte)

Betrachtet werden zwei wechselwirkende Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit dem Hamilton-Operator

$$\hat{H} = -J(\hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)} + \hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}) \tag{1}$$

(a) [1 Punkt] Der Hamilton-Operator soll als 4×4 Matrix in den vier Basiszuständen $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$, die die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{S}_z^{(1)}$ und $\hat{S}_z^{(2)}$ bezeichnen, geschrieben werden.

Zuerst berechnen wir die Wirkung der Operatoren $\hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)}$ und $\hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}$ auf die Eigenzustände:

$$\begin{array}{ll} \hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)}|\uparrow\uparrow\rangle = 0 & \hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}|\uparrow\uparrow\rangle = 0 \\ \hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)}|\uparrow\downarrow\rangle = 0 & \hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}|\uparrow\downarrow\rangle = \hbar^2|\downarrow\uparrow\rangle \\ \hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)}|\downarrow\uparrow\rangle = \hbar^2|\uparrow\downarrow\rangle & \hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}|\downarrow\uparrow\rangle = 0 \\ \hat{S}_+^{(1)}\hat{S}_-^{(2)}|\downarrow\downarrow\rangle = 0 & \hat{S}_+^{(2)}\hat{S}_-^{(1)}|\downarrow\downarrow\rangle = 0 \end{array}. \tag{2}$$

Die Matrixdarstellung des Hamilton-Operators lässt sich jetzt unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Basiszustände bestimmen.

$$(\hat{\mathbf{H}}) = \begin{pmatrix} \langle\uparrow\uparrow|\hat{H}|\uparrow\uparrow\rangle & \langle\uparrow\uparrow|\hat{H}|\uparrow\downarrow\rangle & \langle\uparrow\uparrow|\hat{H}|\downarrow\uparrow\rangle & \langle\uparrow\uparrow|\hat{H}|\downarrow\downarrow\rangle \\ \langle\uparrow\downarrow|\hat{H}|\uparrow\uparrow\rangle & \langle\uparrow\downarrow|\hat{H}|\uparrow\downarrow\rangle & \langle\uparrow\downarrow|\hat{H}|\downarrow\uparrow\rangle & \langle\uparrow\downarrow|\hat{H}|\downarrow\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow\uparrow|\hat{H}|\uparrow\uparrow\rangle & \langle\downarrow\uparrow|\hat{H}|\uparrow\downarrow\rangle & \langle\downarrow\uparrow|\hat{H}|\downarrow\uparrow\rangle & \langle\downarrow\uparrow|\hat{H}|\downarrow\downarrow\rangle \\ \langle\downarrow\downarrow|\hat{H}|\uparrow\uparrow\rangle & \langle\downarrow\downarrow|\hat{H}|\uparrow\downarrow\rangle & \langle\downarrow\downarrow|\hat{H}|\downarrow\uparrow\rangle & \langle\downarrow\downarrow|\hat{H}|\downarrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} = -J\hbar^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Etwas schneller erhält man das Ergebnis, wenn man $\hat{S}_\pm = \hbar\hat{\sigma}_\pm$ benutzt und sich erinnert, dass

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Damit kann die Matrixdarstellung des Hamilton-Operators auch durch ein Kroneckprodukt der Pauli-Matrizen finden:

$$\hat{H} = -J\hbar^2(\hat{\sigma}_+ \otimes \hat{\sigma}_- + \hat{\sigma}_- \otimes \hat{\sigma}_+) \tag{5}$$

(b) [2 Punkte] Das System sei nun zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = |\uparrow,\downarrow\rangle. \tag{6}$$

Der Zeitentwicklungsoperator $\hat{U}(t)$ soll wieder als 4×4-Matrix in den Basiszuständen $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$ geschrieben werden.

Der Zeitentwicklungsoperator ist durch $\hat{U}(t) = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$ gegeben, oder in Reihendarstellung

$$\hat{U}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{H}t/\hbar)^n}{n!}. \tag{7}$$

Betrachten wir nun den gegebenen Hamilton-Operator in Matrixdarstellung (3), so sehen wir

$$\hat{H}^{2n+2} = (-J\hbar^2)^{2n+2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{H}^{2n+1} = (-J\hbar^2)^{2n+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Damit erhält man für den Zeitentwicklungsoperator

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hat{H}t/\hbar)^n}{n!} = \hat{\mathbb{1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iJt/\hbar)^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iJt/\hbar)^{2n+2}}{(2n+2)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iJt/\hbar)^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iJt/\hbar)^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + i\sin(Jt/\hbar) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos(Jt/\hbar) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(Jt/\hbar) & i\sin(Jt/\hbar) & 0 \\ 0 & i\sin(Jt\hbar) & \cos(Jt/\hbar) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9}$$

Nun soll $|\psi(t)\rangle$ berechnet werden:

Man erhält $|\psi(t)\rangle$ jetzt direkt durch Anwendung des Zeitentwicklungsoperators auf $|\psi(0)\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\uparrow,\downarrow\rangle = \cos(Jt/\hbar)\,|\uparrow,\downarrow\rangle + i\sin(Jt/\hbar)\,|\downarrow,\uparrow\rangle \tag{10}$$

Hier hätte man $|\psi(t)\rangle$ auch ohne den Zeitentwicklungsoperator erhalten können, indem man den Zustand $|\psi(0)\rangle$ in den Eigenzustände des Hamilton-Operators (1) entwickelt. Die Eigenzustände sind durch

$$|S/T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle \mp |\downarrow\uparrow\rangle\big) \tag{11}$$

mit den Eigenwerten $\pm J\hbar^2$ gegeben.

2. Messprozess an zwei Spins (3 Punkte)

Betrachten wird ein System von zwei wechselwirkungsfreien Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen ($i = 1, 2$) mit den 4 Basiszuständen $|\uparrow,\uparrow\rangle$, $|\uparrow,\downarrow\rangle$, $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$ die die gemeinsamen Eigenzustände von $\hat{S}_z^{(1)}$ und $\hat{S}_z^{(2)}$ bezeichnen.
Das System sei zur Zeit $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow,\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\uparrow,\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\downarrow,\downarrow\rangle \tag{12}$$

(a) 1[Punkte] Zur Zeit $t = 0$ werde $\hat{S}_z^{(1)}$ gemessen.
Es soll berechnet werden mit welcher Wahrscheinlichkeit der Messwert $-\frac{\hbar}{2}$ erhalten wird:

Alle Basiszustände sind Eigenzustände von $\hat{S}_z^{(1)}$, dabei haben $|\uparrow,\uparrow\rangle$ und $|\uparrow,\downarrow\rangle$ den Eigenwert $\hbar/2$, während $|\downarrow,\uparrow\rangle$ und $|\downarrow,\downarrow\rangle$ den Eigenwert $-\hbar/2$ haben.
Die Wahrscheinlichkeit im Zustand (12) den Wert $-\hbar/2$ zu messen, ist daher durch das Betragsquadrat des Koeffizienten des Eigenzustands $|\downarrow\downarrow\rangle$ gegeben.

$$P_{z,1}\big(\frac{\hbar}{2}\big) = \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4} \tag{13}$$

Was ist der Zustand nach der Messung?
Durch die Messung wird der Zustand auf den Unterraum des Eigenwertes projiziert. Wenn $-\hbar/2$ gemessen wird, ist damit der Zustand gegeben durch

$$|\psi_-\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle \tag{14}$$

Nun ist gefragt welche Ergebnisse möglich sind wenn danach $\hat{S}_x^{(1)}$ gemessen wird, und mit welchen Wahrscheinlichkeiten:

Jetzt wird $\hat{S}_x^{(1)}$ gemessen. Die Eigenfunktionen dieses Operators (für einen Spin) sind

$$|+_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\big) \quad \text{und} \quad |-_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\big), \tag{15}$$

mit den Eigenwerten $\hbar/2$ bzw. $-\hbar/2$. Wir drücken nun $|\psi_-\rangle$ durch diese Eigenfunktionen aus

$$|\psi_-\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+_x, \downarrow\rangle - |-_x, \downarrow\rangle\big). \tag{16}$$

Es können damit die Werte $\pm\hbar/2$ gemessen werden, wobei die Wahrscheinlichkeiten wieder durch die die Summe der Betragsquadrate der Koeffezienten gegeben ist. Also

$$P_{x,1}^{|\psi_-\rangle}\big(+\frac{\hbar}{2}\big) = \Big|\frac{1}{\sqrt{2}}\Big|^2 = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P_{x,1}^{|\psi_-\rangle}\big(-\frac{\hbar}{2}\big) = \Big|\frac{-1}{\sqrt{2}}\Big|^2 = \frac{1}{2} \tag{17}$$

(b) [1 Punkt] Es soll bestimmt werden, was die Wahrscheinlichkeiten sind, wenn gleichzeitig $\hat{S}_z^{(1)}$ und $\hat{S}_z^{(2)}$ gemessen werden, entgegengesetzte bzw. gleiche Werte zu finden:

Werden $\hat{S}_z^{(1)}$ und $\hat{S}_z^{(2)}$ gleichzeitig gemessen sind die möglichen Messwerte:

Messwerte	Wahrscheinlichkeit	Zustand nach Messung
$S_z^{(1)} = +\frac{\hbar}{2},\ S_z^{(2)} = +\frac{\hbar}{2}$	$P_{++} = \big\lvert\frac{1}{\sqrt{2}}\big\rvert^2 = \frac{1}{2}$	$\lvert\uparrow\uparrow\rangle$
$S_z^{(1)} = +\frac{\hbar}{2},\ S_z^{(2)} = -\frac{\hbar}{2}$	$P_{+-} = \big\lvert\frac{1}{2}\big\rvert^2 = \frac{1}{4}$	$\lvert\uparrow\downarrow\rangle$
$S_z^{(1)} = -\frac{\hbar}{2},\ S_z^{(2)} = +\frac{\hbar}{2}$	$P_{-+} = 0$	$\lvert\downarrow\uparrow\rangle$
$S_z^{(1)} = -\frac{\hbar}{2},\ S_z^{(2)} = -\frac{\hbar}{2}$	$P_{--} = \big\lvert\frac{1}{2}\big\rvert^2 = \frac{1}{4}$	$\lvert\downarrow\downarrow\rangle$

Die Wahrscheinlichkeit entgegengesetzte Werte für $\hat{S}_z$ zu finden ist damit $1/4$, die Wahrscheinlichkeit gleiche Werte zu finden $1/2 + 1/4 = 3/4$.

(c) [1 Punkt] Es sollen $\langle\hat{\mathbf{S}}_1\rangle$ und $\langle\hat{\mathbf{S}}_2\rangle$ berechnet, und gezeigt werden, dass die Beträge dieser Vektoren kleiner sind als $\hbar/2$.

Zuerst berechnen wir die Komponenten von $\langle\hat{\mathbf{S}}_1\rangle = (\langle\hat{S}_x^{(1)}\rangle, \langle\hat{S}_y^{(1)}\rangle, \langle\hat{S}_z^{(1)}\rangle)$, dazu betrachten wir $\hat{\mathbf{S}}_1\,|\psi(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x^{(1)}\,|\psi(0)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\downarrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\uparrow\downarrow\rangle\big) \\
\hat{S}_y^{(1)}\,|\psi(0)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\big(\frac{+i}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\uparrow\rangle + \frac{i}{2}\,|\downarrow\downarrow\rangle - \frac{i}{2}\,|\uparrow\downarrow\rangle\big) \\
\hat{S}_z^{(1)}\,|\psi(0)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2}\,|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2}\,|\downarrow\downarrow\rangle\big)
\end{aligned} \tag{18}$$

Unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Basiszustände ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\langle\hat{S}_x^{(1)}\rangle &= \langle\psi(0)|\,\hat{S}_x^{(1)}\,|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) = \frac{\hbar}{4} \\
\langle\hat{S}_y^{(1)}\rangle &= \langle\psi(0)|\,\hat{S}_y^{(1)}\,|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big(0 + \frac{i}{4} - \frac{i}{4}\Big) = 0 \\
\langle\hat{S}_z^{(1)}\rangle &= \langle\psi(0)|\,\hat{S}_z^{(1)}\,|\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big) = \frac{\hbar}{4}
\end{aligned} \tag{19}$$

Der Betrag des Vektors $\langle\hat{\mathbf{S}}_1\rangle$ ist damit gegeben durch

$$|\,\langle\hat{\mathbf{S}}^{(1)}\rangle\,| = \sqrt{\langle\hat{S}_x^{(1)}\rangle^2 + \langle\hat{S}_y^{(1)}\rangle^2 + \langle\hat{S}_z^{(1)}\rangle^2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4}} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} < \frac{\hbar}{2} \tag{20}$$

Analog funktioniert die Berechnung der Komponenten von $\langle \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \rangle = (\langle \hat{S}_x^{(2)} \rangle, \langle \hat{S}_y^{(2)} \rangle, \langle \hat{S}_z^{(2)} \rangle)$.
Dazu betrachten wir nun $\hat{\mathbf{S}}^{(2)} |\psi(0)\rangle$:

$$\begin{aligned}
\hat{S}_x^{(2)} |\psi(0)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2} |\uparrow\uparrow\rangle + \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle\big) \\
\hat{S}_y^{(2)} |\psi(0)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\big(\frac{i}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{i}{2} |\uparrow\uparrow\rangle - \frac{i}{2} |\downarrow\uparrow\rangle\big) \\
\hat{S}_z^{(2)} |\psi(0)\rangle &= \frac{\hbar}{2}\big(\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{2} |\downarrow\downarrow\rangle\big)
\end{aligned} \tag{21}$$

Unter Berücksichtigung der Orthonormalität der Basiszustände ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\langle \hat{S}_x^{(2)} \rangle &= \langle \psi(0)| \hat{S}_x^{(2)} |\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + 0\Big) = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \\
\langle \hat{S}_y^{(2)} \rangle &= \langle \psi(0)| \hat{S}_y^{(2)} |\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big(\frac{i}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}} + 0\Big) = 0 \\
\langle \hat{S}_z^{(2)} \rangle &= \langle \psi(0)| \hat{S}_z^{(2)} |\psi(0)\rangle = \frac{\hbar}{2}\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\Big) = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

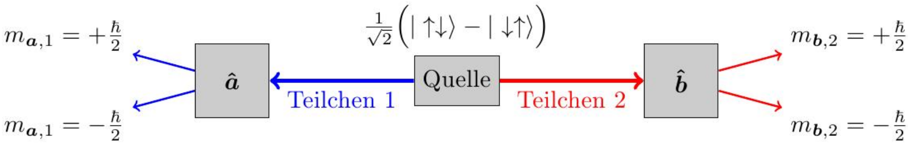
Der Betrag des Vektors $\langle \hat{\mathbf{S}}^{(1)} \rangle$ ist damit gegeben durch

$$| \langle \hat{\mathbf{S}}^{(2)} \rangle | = \sqrt{\langle \hat{S}_x^{(2)} \rangle^2 + \langle \hat{S}_y^{(2)} \rangle^2 + \langle \hat{S}_z^{(2)} \rangle^2} = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + 0 + 0} = \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} < \frac{\hbar}{2} \tag{23}$$

Das Ergebnis ist auf Interferenzen zwischen den beiden Spins zurückzuführen. Die Erwartungswerte erreichen nur dann den maximalen Wert $\hbar/2$, wenn der Zustand ein direktes Produkt, wie z.B. $|\uparrow\downarrow\rangle$ oder $|\downarrow\downarrow\rangle$ ist.

3. Bell'sche Ungleichung (4 Punkte)

Wir betrachten eine Quelle, die paarweise zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen in einem Spin-Singulett-Zustand $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\big)$ in entgegengesetzte Richtungen aussendet. Weit von der Quelle entfernt befinden sich zwei Stern-Gerlach-Apparate, die die Spins der beiden Teilchen in den Richtungen $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ bzw. $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ messen. Die Observablen die gemessen werden, sind durch die Operatoren $\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{S}}^{(1)}$ und $\hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}} = \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{S}}^{(2)}$ gegeben. Die möglichen Messwerte $\pm\frac{\hbar}{2}$ des Teilchens 1 seien mit $m_{\mathbf{a},1} = \pm\frac{\hbar}{2}$ bezeichnet, die des Teilchens 2 mit $m_{\mathbf{b},2} = \pm\frac{\hbar}{2}$ (siehe Abbildung).



(a) [2 Punkte] Es soll die kombinierte Wahrscheinlichkeiten

$$P(m_{\mathbf{a},1}, m_{\mathbf{b},2}) = |\langle m_{\mathbf{a},1}, m_{\mathbf{b},2}|S\rangle|^2, \tag{24}$$

als Funktion des Winkels θ zwichen den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ berechnet werden. Wobei $|m_{\mathbf{a},1}, m_{\mathbf{b},2}\rangle$ die Eigenzustände der Observablen $\hat{S}^{(1)}_{\mathbf{a}}$ und $\hat{S}^{(2)}_{\mathbf{b}}$ mit Eigenwerten $m_{\mathbf{a},1}$ und $m_{\mathbf{b},2}$ sind.

Wir wählen das Koordinatensystem so, dass die Richtung $\mathbf{a}$ entlang der z-Achse liegt, und die Richtung $\mathbf{b}$ in der x-z-Ebene mit einem Winkel θ zu der z-Achse. Also

$$\mathbf{a} = (0,0,1), \qquad \mathbf{b} = (\sin\theta, 0, \cos\theta). \tag{25}$$

Der Singulett-Zustand ist rotationsinvariant, damit hängt der Zustand nicht von der Wahl des Koordinatensystems ab. Für ein Teilchen sind die Eigenzustände der Operatoren $\hat{\mathbf{S}}^{(1)}_{\mathbf{a}} = \hat{S}^{(1)}_z$ und $\hat{\mathbf{S}}^{(2)}_{\mathbf{b}}$ in dieser Basis damit

$$|+_{\mathbf{a}}\rangle \equiv |m_{\mathbf{a},1} = \hbar/2\rangle \;\;\; = |\uparrow\rangle \quad |+_{\mathbf{b}}\rangle \equiv |m_{\mathbf{b},2} = \hbar/2\rangle \;\;\; = \cos\theta/2\,|\uparrow\rangle + \sin\theta/2\,|\downarrow\rangle \tag{26}$$
$$|-_{\mathbf{a}}\rangle \equiv |m_{\mathbf{a},1} = -\hbar/2\rangle = |\downarrow\rangle \quad |-_{\mathbf{b}}\rangle \equiv |m_{\mathbf{b},2} = -\hbar/2\rangle = \sin\theta/2\,|\uparrow\rangle - \cos\theta/2\,|\downarrow\rangle \tag{27}$$
$$. \tag{28}$$

Wir schreiben nun den Singulett-Zustand $|S\rangle$ in der Eigenbasis $|\pm_{\mathbf{a}}, \pm_{\mathbf{b}}\rangle = |\pm_{\mathbf{a}}\rangle \otimes |\pm_{\mathbf{b}}\rangle$

$$\begin{aligned} |S\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+_{\mathbf{a}}\rangle\otimes|\downarrow\rangle - |-_{\mathbf{a}}\rangle\otimes|\downarrow\rangle\big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|+_{\mathbf{a}}\rangle\left(\sin\frac{\theta}{2}|+_{\mathbf{b}}\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-_{\mathbf{b}}\rangle\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}|-_{\mathbf{a}}\rangle\left(\cos\frac{\theta}{2}|+_{\mathbf{b}}\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-_{\mathbf{b}}\rangle\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\theta}{2}|+_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|+_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|-_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle - \sin\frac{\theta}{2}|-_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle\right). \end{aligned} \tag{29}$$

Die Wahrscheinlichkeiten können nun direkt abgelesen werden:

$$\begin{aligned} P(+\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}) &= P(+_{\mathbf{a}}, +_{\mathbf{b}}) = |\langle +_{\mathbf{a}} +_{\mathbf{a}}|S\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \\ P(+\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}) &= P(+_{\mathbf{a}}, -_{\mathbf{b}}) = |\langle +_{\mathbf{a}} -_{\mathbf{b}}|S\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\ P(-\frac{\hbar}{2}, +\frac{\hbar}{2}) &= P(-_{\mathbf{a}}, +_{\mathbf{b}}) = |\langle -_{\mathbf{a}} +_{\mathbf{b}}|S\rangle|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} \\ P(-\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}) &= P(-_{\mathbf{a}}, -_{\mathbf{b}}) = |\langle -_{\mathbf{a}} -_{\mathbf{b}}|S\rangle|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2} \end{aligned} \tag{30}$$

(b) [1 Punkt] Es soll gezeigt werden, dass der normierte Erwartungswert der Observablen $\hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)} \cdot \hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}$ für den Singulett-Zustand durch

$$E(\mathbf{a},\mathbf{b}) \equiv \frac{4}{\hbar^2}\,\langle S|\hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)} \cdot \hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}|S\rangle = -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = -\cos\theta \tag{31}$$

gegeben ist, wobei θ der Winkel zwischen den Achsen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist:

Die Zustände $|\pm_{\mathbf{a}}\pm_{\mathbf{b}}\rangle$ sind auch Eigenzustände der Observablen $\hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)}\hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)}\hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}\,|+_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle &= +\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\,|+_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle \quad & \hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)}\hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}\,|+_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle &= -\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\,|+_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle \\ \hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)}\hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}\,|-_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle &= -\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\,|-_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle \quad & \hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)}\hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}\,|-_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle &= +\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\,|-_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle \end{aligned} \tag{32}$$

Damit ist

$$\hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)}\hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}\,|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{\hbar}{2}\Big)^2\Big(\sin\frac{\theta}{2}\,|+_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,|+_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,|-_{\mathbf{a}}+_{\mathbf{b}}\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,|-_{\mathbf{a}}-_{\mathbf{b}}\rangle\Big) \tag{33}$$

und es folgt

$$\begin{aligned} E(\mathbf{a},\mathbf{b}) &= \frac{4}{\hbar^2}\,\langle S|\hat{S}_{\mathbf{a}}^{(1)} \cdot \hat{S}_{\mathbf{b}}^{(2)}|S\rangle \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2}\Big) \\ &= \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} = -\cos\theta = -\mathbf{ab} \end{aligned} \tag{34}$$

Wenn die beiden Richtungen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ *parallel* sind ($\theta = 0$) haben wir eine *anti-Korrelation* $E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -1$, d.h. die gemessenen Spins zeigen immer in entgegengesetzte Richtungen. Wenn die beiden Richtungen aber *orthogonal* sind ($\theta = \pi/2$), dann haben wir *keine Korrelation* $E(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$.

(c) [1 Punkt] Nehmen wir nun an, dass die Messgeräte zwei Einstellungen haben: Der Spin des ersten Teilchens kann entweder entlang der Richtung $\mathbf{a}$ oder entlang der Richtung $\mathbf{a}'$ gemessen werden. ähnlich kann auch der Spin des zweiten Teilchens entweder entlang der Richtung $\mathbf{b}$ oder $\mathbf{b}'$ gemessen werden. Das Experiment wird vielfach, mit verschiedenen Kombinationen der Richtungen, durchgeführt. Am Ende werden die Daten in eine Funktion

$$C = E(\mathbf{a},\mathbf{b}) - E(\mathbf{a},\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}) + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}') \tag{35}$$

zusammengefasst. Es kann gezeigt werden, dass für eine klassische Theorie die Ungleichung

$$|C| \leq 2 \tag{36}$$

gelten muss. Dies ist die Bell'sche Ungleichung in der Form von Clauser, Horne, Shimony und Holt (CHSH-Ungleichung). Zu zeigen ist nun, dass man in der quantenmechanischen Theorie die Richtungen $\mathbf{a}$,$\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}$,$\mathbf{b}'$ so wählen kann, dass die Ungleichung verletzt wird:

Für jede Wahl von $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}$,$\mathbf{b}'$ können wir die Berechnung von oben wiederholen. Einzig die Winkel $\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, $\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}'}$, $\theta_{\mathbf{a}',\mathbf{b}}$ und $\theta_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}$ zwischen den Richtungen $\mathbf{a}$,$\mathbf{a}'$ und $\mathbf{b}$,$\mathbf{b}'$ gehen in die Berechnung ein. Explizit ist damit

$$\begin{aligned} C &= E(\mathbf{a},\mathbf{b}) - E(\mathbf{a},\mathbf{b}') + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}) + E(\mathbf{a}',\mathbf{b}') \\ &= -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}' - \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}'\cdot\mathbf{b}' \\ &= -\cos\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} + \cos\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}'} - \cos\theta_{\mathbf{a}',\mathbf{b}} - \cos\theta_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'}. \end{aligned} \tag{37}$$

Wählen wir nun z.B $\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = 3\pi/4$, $\theta_{\mathbf{a},\mathbf{b}'} = \pi/4$, $\theta_{\mathbf{a}',\mathbf{b}} = 5\pi/4$ und $\theta_{\mathbf{a}',\mathbf{b}'} = 3\pi/4$ haben wir

$$C = 2\sqrt{2} > 2. \tag{38}$$

Anmerkung: Die Verletzung der Bell'schen Ungleichung wurde mehrfach experimentell an Quantensystemen nachgewiesen und beweist somit, dass es dafür keine unterliegende klassische Theorie geben kann.