

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 0 (Lösungen)

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Besprechung: 15.04.2015

1. Skalarprodukt im ℓ^2 und \mathcal{L}^2 (a) Wir zeigen nacheinander mit $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

- (Sesqui-)Linearität:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{a} | \lambda_1 \mathbf{b} + \lambda_2 \mathbf{c} \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i^* (\lambda_1 b_i + \lambda_2 c_i) = \lambda_1 \sum_{i=1}^n a_i^* b_i + \lambda_2 \sum_{i=1}^n a_i^* c_i = \lambda_1 \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle + \lambda_2 \langle \mathbf{a} | \mathbf{c} \rangle \\ \langle \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle &= \sum_{i=1}^n (\lambda_1 a_i + \lambda_2 b_i)^* c_i = \lambda_1^* \sum_{i=1}^n a_i^* c_i + \lambda_2^* \sum_{i=1}^n b_i^* c_i = \lambda_1^* \langle \mathbf{a} | \mathbf{c} \rangle + \lambda_2^* \langle \mathbf{b} | \mathbf{c} \rangle\end{aligned}$$

- Hermitizität:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i = \left(\sum_{i=1}^n b_i^* a_i \right)^* = \langle \mathbf{b} | \mathbf{a} \rangle^* \quad (1)$$

- Positive Definitheit:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle := \|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \geq 0 \quad (2)$$

(b) Zu berechnen sind jeweils die Reihen

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = e \\ \|\mathbf{b}\|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} |b_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}\end{aligned} \quad (3)$$

$$\|\mathbf{c}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |q^2|^i \stackrel{0 < |q| < 1}{=} \frac{1}{1 - |q|^2} \quad (4)$$

Da alle Reihen existieren und gegen einen endlichen Wert konvergieren, gilt dass $a_n, b_n, c_n \in \ell^2$.(c) Wir zeigen nacheinander mit $\psi(x), \phi(x), \chi(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$:

- (Sesqui-)Linearität:

$$\begin{aligned}\langle \psi | \lambda_1 \phi + \lambda_2 \chi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) [\lambda_1 \phi(x) + \lambda_2 \chi(x)] = \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \phi(x) + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \chi(x) \\ &= \lambda_1 \langle \psi | \phi \rangle + \lambda_2 \langle \psi | \chi \rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda_1 \psi + \lambda_2 \phi | \chi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx [\lambda_1 \psi(x) + \lambda_2 \phi(x)]^* \chi(x) = \lambda_1^* \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \chi(x) + \lambda_2^* \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \chi(x) \\ &= \lambda_1^* \langle \psi | \chi \rangle + \lambda_2^* \langle \phi | \chi \rangle\end{aligned}$$

- Hermitizität:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \phi(x) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx \phi^*(x) \psi(x) \right)^* = \langle \phi | \psi \rangle^* \quad (5)$$

- Positive Definitheit:

$$\langle \psi | \psi \rangle := \|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 \geq 0 \quad (6)$$

- (d) Betrachte eine beliebige Funktion $f(x) \in \mathcal{L}^2$. Unter Ausnutzung der Vollständigkeitsrelation können wir diese in die Basis $\{P_n\}$ entwickeln:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \underbrace{\delta(x-x')}_{\sum_{n=0}^{\infty} P_n^*(x') P_n(x)} f(x') = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx' P_n^*(x') f(x')}_{=\langle P_n | f \rangle} P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\langle P_n | f \rangle}_{a_n} P_n(x) \quad (7)$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus, denn bei fester Basiswahl (z.B. Entwicklung in Fourierreihe, Hermite-Polynome, etc.) sind die Entwicklungskoeffizienten eindeutig gegeben und es gilt, dass

$$f(x) \in \mathcal{L}^2 \Leftrightarrow \infty > \|f\|^2 = \int dx |f(x)|^2 = \sum_{n,m=0}^{\infty} a_n^* a_m \underbrace{\int dx P_n^*(x) P_m(x)}_{\delta_{n,m}} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \Leftrightarrow (a_n) \in \ell^2 \quad (8)$$

Man kann die (a_n) nun als unendlich dimensionalen Vektor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \end{pmatrix}_{\{P_0, P_1, \dots\}} \quad (9)$$

in der Basis der Basisfunktionen $\{P_n\}$ ansehen.

2. Erwartungswerte einer gaussförmigen Wellenfunktion

- (a) Wir berechnen

$$\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \quad (10)$$

Substituiere $z = \frac{x-x_0}{\sqrt{2\sigma^2}}$ sodass

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \quad (11)$$

Das Integral über e^{-x^2} kann mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnet werden über

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} dr r e^{-r^2} = -\pi [e^{-r^2}]_0^{\infty} = \pi \end{aligned} \quad (12)$$

als

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = \sqrt{\pi} \quad (13)$$

Also folgt

$$\|\psi\|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} = 1 \quad \checkmark \quad (14)$$

(b) Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x} \rangle &= \langle \psi | \hat{x} | \psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \cdot |\psi(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy (y+x_0) e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + x_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_1 \\
&= x_0
\end{aligned} \tag{15}$$

(c) Neben $\langle \hat{x} \rangle = x_0$ benötigen wir nun noch

$$\begin{aligned}
\langle \hat{x}^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy (y+x_0)^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} + 2x_0 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=0} + x_0^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{=1} \\
&= x_0^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y \cdot (y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}) \stackrel{\text{part. Int.}}{=} x_0^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \sigma^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \\
&= x_0^2 + \sigma^2
\end{aligned} \tag{16}$$

sodass

$$\Delta X = \sqrt{\langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2} = \sqrt{x_0^2 + \sigma^2 - x_0^2} = \sigma \tag{17}$$

(d) Der mittlere Impuls des Teilchens ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \frac{\hbar}{i} \partial_x \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \frac{\hbar}{i} \partial_x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \frac{\hbar}{i} \frac{x-x_0}{2\sigma^2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \\
&= -\frac{\hbar/i}{2\sigma^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} = 0
\end{aligned} \tag{18}$$

(e) Wir benötigen nun:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p}^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi^*(x) \left(\frac{\hbar}{i} \partial_x \right)^2 \psi(x) = -\frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \partial_x^2 e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \\
&\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\partial_x e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2}} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^4} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy y^2 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}}_{\stackrel{(16)}{=} \sigma^2} \\
&= \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}
\end{aligned} \tag{19}$$

sodass

$$\Delta P = \sqrt{\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2} = \frac{\hbar}{2\sigma} \tag{20}$$

Das Unschärfeprodukt

$$\Delta X \cdot \Delta P = \sigma \cdot \frac{\hbar}{2\sigma} = \frac{\hbar}{2} \tag{21}$$

ist dann minimal für ein Gauss-Wellenpaket nach der Heisenberg'schen Unschärferelation:

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \frac{\hbar}{2} \tag{22}$$