Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 1

Abgabe: 21.04.2015, Besprechung: 22.04.2015

---

1. Schrödingergleichung für ein freies relativistisches Teilchen (5 Punkte, mündlich)

Historisch leitete Schrödinger zunächst eine Wellengleichung für ein relativistisches Teilchen mit Masse m her (auch bekannt als **Klein-Gordon-Gleichung**). Leite, ausgehend von der relativistischen Energie-Impuls Beziehung $E = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + m^2c^4}$ eine solche quantenmechanische Wellengleichung her. Motiviere und beschreibe dein Vorgehen.

2. Wellenfunktion im Potential (7 Punkte, mündlich)

Betrachte ein Teilchen in einem Zustand beschrieben von der Wellenfunktion

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}d^{1/2}} \exp\left(ikx - \frac{x^2}{2d^2}\right). \tag{1}$$

(a) (1 Punkt) Zeige, dass $\psi(x)$ korrekt normiert ist.

(b) (4 Punkte). Bestimme die Erwartungswerte $\langle\widehat{x}\rangle$, $\langle\widehat{p}\rangle$, $\langle\widehat{x}^2\rangle$ und $\langle\widehat{p}^2\rangle$. Analysiere die Unschärferelation

$$\langle(\Delta\widehat{x})\rangle\langle(\Delta\widehat{p})\rangle \tag{2}$$

wobei die Standardabweichung definiert ist über $\left\langle\left(\Delta\widehat{O}\right)\right\rangle = \sqrt{\left\langle\widehat{O}^2\right\rangle - \left\langle\widehat{O}\right\rangle^2}$.

(c) (2 Punkte) Finde das Potential $V(x)$ für welches der Zustand $\psi(x)$ mit $k = 0$ eine Eigenfunktion ist und die Schrödingergleichung löst. Was ist die Energie E dieses Systems? Interpretiere das gefundene Potential: Stelle einen Zusammenhang zwischen der gefundenen Energie E und den bekannten Größen eines klassischen Teilchens im Potential $V(x)$ her. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $V(x = 0) = 0$ verwendet werden.

3. Matrixexponentialfunktion (8 Punkte, schriftlich)

Die Matrixexponentialfunktion ist definiert als

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{3}$$

wobei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine quadratische Matrix ist.

(a) (2 Punkte) Beweise, dass die Definition in Gl. (3) für jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sinnvoll ist. Dazu müssen Sie zeigen, dass die Zahlenfolge:

$$B_{ij}^{(K)} := \left| \left[\sum_{k=0}^{K} \frac{A^k}{k!}\right]_{ij} \right| \tag{4}$$

für $K \to \infty$ für beliebiges $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ konvergiert.

(b) (1 Punkt) Zeige, dass für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\lambda}e^{\lambda A} = Ae^{\lambda A} = e^{\lambda A}A \tag{5}$$

(c) (1 Punkt) Welche Bedingung muss gelten, dass für $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A \tag{6}$$

(d) (2 Punkte) Sei $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nun eine hermitesche Matrix $C = C^\dagger$. Sei $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine unitäre Matrix, welche C diagonalisiert $C_{\text{diag}} = U^\dagger C U$. Zeige, dass U dann auch e^C diagonalisiert

$$(e^C)_{\text{diag}} = U^\dagger e^C U \tag{7}$$

und bestimme die Diagonalelemente von $(e^C)_{\text{diag}}$.

(e) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Matrixexponentialfunktion von

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

einmal durch die explizite Definition (3) und das andere Mal mit Hilfe von (7) .