Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 2
Abgabe: 28.04.2015, Besprechung: 29.04.2015

---

1. Rechnen mit Operatoren (8 Punkte, schriftlich)

Ein Operator $\hat{A}$ ist ein mathematisches Objekt, welches auf einen Zustand wirkt. Einfache Beispiele hierfür sind quadratische Matrizen $\hat{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$, welche auf n-komponentige Vektoren $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$ wirken

$$\hat{A}\mathbf{u} = \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \tag{1}$$

oder eine Ableitung $\partial/\partial x$, welche auf eine Funktion $f(x)$ wirkt

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = f'(x) \tag{2}$$

In dieser Aufgabe wollen wir nun einige Eigenschaften von Operatoren genauer untersuchen.

(a) (1 Punkt) Eine wichtige Eigenschaft von Operatoren ist, dass sie im allgemeinen nicht vertauschen. Das heißt $\hat{A}\hat{B} \overset{\text{i.A.}}{\neq} \hat{B}\hat{A}$, was im Falle von Matrizen offensichtlich ist. Es ist daher sinnvoll, sich den Kommutator zu definieren als:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{3}$$

Auch für kontinuierliche Operatoren, die auf Funktionen wirken, können solche Kommutatoren berechnet werden. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass der Ortsoperator durch $\hat{\mathbf{x}}$ und der Impulsoperator durch $\hat{\mathbf{p}} = \frac{\hbar}{i}\nabla$ gegeben sind. Zeige, dass gilt

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{jk} \qquad j,k = 1,2,3 \tag{4}$$

(b) (2 Punkte) Zeige die Operatoridentitäten

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} \tag{5}$$

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B} \tag{6}$$

(c) (1 Punkt) Nutze das Cauchy-Produkt um zu zeigen dass gilt

$$e^{\hat{A}} e^{-\hat{A}} = \hat{\mathbb{1}} \tag{7}$$

wobei $e^{\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{A}^n/n!$.

(d) (3 Punkte) Beweise die Operatoridentität ($n \in \mathbb{N}/\{0\}$)

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = \sum_{m=0}^{n-1} \hat{B}^m [\hat{A}, \hat{B}] \hat{B}^{n-1-m} \tag{8}$$

(e) (1 Punkt) Zeige, dass für $[\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ gilt

$$[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}] \tag{9}$$

2. Ehrenfest Theorem für Teilchen im harmonischen Oszillator (6 Punkte, mündlich)

Betrachte ein Teilchen im Potential des eindimensionalen harmonischen Oszillators

$$\hat{V}(x) = \frac{k\hat{x}^2}{2} \tag{10}$$

(a) (2 Punkte) Berechne die zeitliche Änderung $\partial_t\langle\,\hat{x}\,\rangle_t, \partial_t\langle\,\hat{p}\,\rangle_t$ im Potential $\hat{V}(x)$ und vergleiche sie mit den klassisch auftretenden Bewegungsgleichungen.

(b) (2 Punkte) Bestimme die allgemeine Lösung der auftretenden Differentialgleichungen für $\langle\,\hat{x}\,\rangle_t, \langle\,\hat{p}\,\rangle_t$.

(c) (2 Punkte) Warum stimmen für das spezielle Potential (10) die klassischen und quantenmechanischen Bewegungsgleichung exakt überein?
Tipp: Betrachte das Ehrenfest Theorem für Potentiale $\hat{V}(x) = \lambda\hat{x}^n,\ n \in \mathbb{R}$.

3. Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf (6 Punkte, mündlich)

Betrachte ein Teilchen im unendlich tiefen eindimensionalen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < \frac{a}{2} \\ \infty & |x| \geq \frac{a}{2}. \end{cases} \tag{11}$$

In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass die Eigenfunktionen des Hamilton-Operators gegeben sind durch $(n = 1, 2, \ldots)$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos(k_n x) & n \text{ ungerade} \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(k_n x) & n \text{ gerade}. \end{cases} \tag{12}$$

wobei $k_n = n\frac{\pi}{a}$ mit Eigenenergien $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{a^2}n^2$.

(a) (2 Punkte) Zeige, dass die Wellenfunktionen $\psi_n(x)$ orthogonal zueinander sind, d.h. das gilt $\int \psi_n^*(x)\,\psi_m(x)\,dx = \delta_{nm}$.

(b) (1 Punkt) Bestimme $\langle\hat{x}^2\rangle$ als Funktion von n und vergleiche das Resultat mit dem klassischen Ergebnis, in dem die Dichte konstant ist $\rho_{\text{class}} = a^{-1}$.

(c) (1 Punkte) Berechne die Erwartungswerte $\langle\hat{p}\rangle, \langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$ und untersuche das Unschärfeprodukt

$$\Delta x \cdot \Delta p \tag{13}$$

wobei $\Delta x = \sqrt{\langle\,\hat{x}^2\,\rangle - \langle\,\hat{x}\,\rangle^2}$ und analog für Δp.

(d) (2 Punkte) Betrachte eine Messung, bei der 10^4 (nicht-wechselwirkende) Teilchen im Potential (11) im Zustand $n = 4$ präpariert sind. Was ist die Wahrscheinlichkeitsdichte eines Teilchens am Ort x zu sein? Wie viele Teilchen erwartet man in der Region $-\frac{a}{4} < x < 0$ zu finden?