Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 3

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Abgabe: 5.05.2015, Besprechung: 6.05.2015

1. Rechnen mit Operatoren II (10 Punkte, mündlich)

(a) (2 Punkte) Translationsoperator:

Zeigen Sie, dass der Zustand $|\phi\rangle = e^{i\hat{p}a/\hbar} |\psi\rangle$ dem um die Distanz a verschobenen Zustand $|\psi\rangle$ entspricht, d.h. $\phi(x) = \psi(x+a)$, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator ist.

(b) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien Hermite'sche Operatoren.(i) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle$ rein imaginär ist.(ii) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Erwartungswert $\langle \{\hat{A}, \hat{B}\} \rangle$ rein reel ist, wobei der Antikommutator definiert ist als $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

(iii) (1 Punkt) Sind folgende Operatoren Hermite'sch?

1.) $\hat{A}\hat{B}\hat{A}$ 2.) $e^{i\hat{A}}$ 3.) $e^{i[\hat{A}, \hat{B}]}$ (iv) (1 Punkt) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t})$, wobei $\hat{A}$ und $\hat{B}$ zeitunabhängig sind.

(c) (2 Punkte) Beweisen Sie die Identität (das Cauchy Produkt könnte von Hilfe sein)

$$e^{\hat{A}\hat{B}}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A}, [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]]] + \dots \quad (1)$$

(d) (2 Punkte) Zeige Sie, dass die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel

$$e^{\hat{X}+\hat{Y}} = e^{\hat{X}}e^{\hat{Y}}e^{-[\hat{X}, \hat{Y}]/2} \quad (2)$$

gilt wenn

$$[\hat{X}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = [\hat{Y}, [\hat{X}, \hat{Y}]] = 0 \quad (3)$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\hat{F}(t) = e^{\hat{X}\cdot t}e^{\hat{Y}\cdot t}$ und bilden Sie die Ableitung $\partial_t \hat{F}(t)$. Die auftretende Differentialgleichung lässt sich einfach lösen.

2. Wellenpaket und Kontinuitätsgleichung (10 Punkte schriftlich)

- (a) (1 Punkt) Der Hamilton-Operator eines (nicht-relativistischen) freien Teilchens ist gegeben durch $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$. Bestimmen Sie in einer Dimension die Eigenfunktionen $\psi(x, t)$ und die Eigenenergien $E(p)$.

- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x+i\alpha)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

- (c) (1 Punkt) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion des freien Teilchens gegeben durch

$$\psi(x, 0) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} g(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} \quad \text{mit} \quad g(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{4\sigma^2}} \quad (5)$$

berechnen Sie durch Lösen des Integrals explizit $\psi(x, 0)$.

- (d) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die zeitabhängige Wellenfunktion

$$\psi(x, t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} g(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} e^{-i\frac{E(p)t}{\hbar}} \quad \text{mit} \quad E(p) = \frac{p^2}{2m} \quad (6)$$

die Schrödingergleichung eines freien Teilchens erfüllt.

Zeigen Sie weiter, dass $\psi(x, t)$ die Form

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\sqrt{a(1 + i\frac{\hbar t}{2ma^2})}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(1 + i\frac{\hbar t}{2ma^2})}\right), \quad a > 0 \quad (7)$$

hat.

Hinweis: Ohne Beweis kann verwendet werden, dass gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-cx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{c}} \quad \text{für} \quad \text{Re}(c) > 0. \quad (8)$$

- (e) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ zu allen Zeiten auf 1 normiert ist. Berechnen Sie die Standardabweichungen $\Delta X(t)$ und $\Delta P(t)$ sowie das Unschärfeprodukt $\Delta X(t) \cdot \Delta P(t)$.

- (f) (1 Punkte) Zeigen Sie, durch Einsetzen der Wellenfunktion (6), dass die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \nabla \mathbf{j}(x, t) = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{j} = \frac{\hbar}{2im} [\psi^*(x, t) \nabla \psi(x, t) - (\nabla \psi(x, t)^*) \psi(x, t)] \quad (9)$$

erfüllt ist.