Karlsruher Institut für Technologie | Institut für Theorie der Kondensierten Materie

**Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15**

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

**Blatt 3 (Lösungen)**
**Abgabe: 5.05.2015, Besprechung: 6.05.2015**

---

## 1. Rechnen mit Operatoren II (10 Punkte, schriftlich)

(a) (2 Punkte) Translation
*Zeigen Sie, dass der Zustand $\phi(x) = e^{i\hat{p}a/\hbar}\psi(x)$ dem um die Distanz $a$ verschobenen Zustand $\psi(x)$ entspricht, d.h. $\phi(x) = \psi(x+a)$, wobei $\hat{p}$ der Impulsoperator ist.*
Wir nutzen die Reihendarstellung der Exponentialfunktion und wenden sie auf die Wellenfunktion $\psi(x)$ an:

$$\phi(x) = e^{i\hat{p}a/\hbar}\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{i}{\hbar} a \overbrace{\frac{\hbar}{i}\partial_x}^{\hat{p}})^n}{n!}\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\partial_x^n \psi(x) a^n$$

Der letzte Ausdruck ist allerdings gerade die Taylorentwicklung $\psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\partial_x^n\psi(x)a^n$. Es gilt also $\phi(x) = \psi(x+a)$.

(b) $\hat{A}$ und $\hat{B}$ seien Hermite'sche Operatoren.

(i) (1 Punkt) Um zu zeigen, dass der Erwartungswert $\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle$ rein imaginär ist, betrachten wir zunächst

$$[\hat{A},\, \hat{B}]^\dagger = (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger = \hat{B}\hat{A} - \hat{A}\hat{B} = -[\hat{A},\, \hat{B}] \tag{1}$$

Damit gilt für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|[\hat{A},\, \hat{B}]|\psi\rangle^* = \langle\psi|[\hat{A},\, \hat{B}]^\dagger|\psi\rangle = -\langle\psi|[\hat{A},\, \hat{B}]|\psi\rangle\,. \tag{2}$$

Der Erwartungswert $\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle$ ist damit rein imaginär.

(ii) (1 Punkt) Das der Erwartungswert $\langle\{\hat{A},\hat{B}\}\rangle$ des Antikommutators rein reel ist läßt sich analog zeigen:

$$\{\hat{A},\, \hat{B}\}^\dagger = (\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})^\dagger = \hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger = \hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B} = \{\hat{A},\, \hat{B}\} \tag{3}$$

Damit gilt für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$

$$\langle\psi|\{\hat{A},\, \hat{B}\}|\psi\rangle^* = \langle\psi|\{\hat{A},\, \hat{B}\}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\{\hat{A},\, \hat{B}\}|\psi\rangle\,. \tag{4}$$

Der Erwartungswert $\langle\{\hat{A},\hat{B}\}\rangle$ ist damit rein reel.

(iii) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}(\hat{A}\hat{B}\hat{A})^\dagger &= \hat{A}^\dagger\hat{B}^\dagger\hat{A}^\dagger = \hat{A}\hat{B}\hat{A} \rightarrow \text{Hermite'sch}\\ \left(e^{i\,\hat{A}}\right)^\dagger &= e^{-i\,\hat{A}^\dagger} = e^{-i\,\hat{A}} \rightarrow \text{nicht Hermite'sch}\\ \left(e^{i\,[\hat{A},\,\hat{B}]}\right)^\dagger &= e^{-i\,[\hat{A},\,\hat{B}]^\dagger} \underbrace{=}_{Gl.(1)} e^{i\,[\hat{A},\,\hat{B}]} \rightarrow \text{Hermite'sch}\end{aligned}$$

(iv) (1 Punkt)

Es soll $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t})$ berechnet werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t}) = (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\hat{A}t})e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t}(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\hat{B}t}) = \hat{A}e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t}\hat{B}e^{\hat{B}t} = \hat{A}e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t} + e^{\hat{A}t}e^{\hat{B}t}\hat{B}$$

(c) Wir betrachten

$$\begin{aligned} e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} &= \left(\sum_{n_0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}\right)\hat{B}\left(\sum_{m_0}^{\infty}\frac{(-\hat{A})^m}{m!}\right) = \left(\sum_{n_0}^{\infty}\frac{\hat{A}^n}{n!}\right)\left(\sum_{m_0}^{\infty}\frac{\hat{B}(-\hat{A})^m}{m!}\right) \\ &\overset{(??)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{\hat{A}^m}{m!}\frac{\hat{B}(-\hat{A})^{n-m}}{(n-m)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n-m}}_{\hat{B}_n} \end{aligned} \tag{5}$$

Wir müssen nun zeigen, dass gilt (wir beschränke uns auf $n \geq 1$ da der Fall $\hat{B}_0 = \hat{B}$ trivial ist)

$$\hat{B}_n = \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n-m} = \underbrace{\hat{A}, [\hat{A}, \dots [\hat{A}, \hat{B}]]}_{n \text{ mal } \hat{A}} \tag{6}$$

Wir machen dies mit vollständiger Induktion:

- **Induktionsanfang:** Zeige für $n = 1$

$$\hat{B}_1 = \sum_{m=0}^{1}\binom{1}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{1-m} = -\hat{B}\hat{A} + \hat{A}\hat{B} = [\hat{A}, \hat{B}] \quad \checkmark \tag{7}$$

- **Induktionsbehauptung:** Für ein $n \in \mathbb{R}$ gilt (6).
- **Induktionsschritt:** Schließe von $n \to n+1$

$$\begin{aligned} \hat{B}_{n+1} &= \sum_{m=0}^{n+1} \underbrace{\binom{n+1}{m}}_{\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m}} \hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n+1-m} \\ &= \sum_{m=1}^{n+1}\binom{n}{m-1}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n+1-m} + \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n+1-m} \\ &= \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^{m+1}\hat{B}(-\hat{A})^{n-m} + \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n+1-m} \\ &= \hat{A}\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n-m} - \sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}\hat{A}^m\hat{B}(-\hat{A})^{n-m}\hat{A} \\ &= \hat{A}\hat{B}_n - \hat{B}_n\hat{A} = [\hat{A}, \hat{B}_n] = \underbrace{\hat{A}, [\hat{A}, \dots [\hat{A}, \hat{B}]]}_{n+1 \text{ mal } \hat{A}} \end{aligned} \tag{8}$$

Damit gilt also

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}B_n = 1 + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \tag{9}$$

- Betrachte den Operator

$$\hat{F}(t) = e^{\hat{X}\cdot t}e^{\hat{Y}\cdot t} \tag{10}$$

und leite diesen nach $t$ ab

$$
\begin{aligned}
\partial_t \hat{F}(t) &= (\partial_t e^{\hat{X}\cdot t}) e^{\hat{Y}\cdot t} + e^{\hat{X}\cdot t}\partial_t e^{\hat{Y}\cdot t} = \hat{X} e^{\hat{X}\cdot t} e^{\hat{Y}\cdot t} + e^{\hat{X}\cdot t}\hat{Y} e^{\hat{Y}\cdot t} \\
&= \hat{X} e^{\hat{X}\cdot t} e^{\hat{Y}\cdot t} + e^{\hat{X}\cdot t}\hat{Y} e^{-\hat{X}\cdot t} e^{\hat{X}\cdot t} e^{\hat{Y}\cdot t} \\
&= (\hat{X} + e^{\hat{X}\cdot t}\hat{Y} e^{-\hat{X}\cdot t}) e^{\hat{X}\cdot t} e^{\hat{Y}\cdot t} \\
&\overset{(9)}{=} (\hat{X} + \hat{Y} + [\hat{X},\hat{Y}]t + \underbrace{\frac{t^2}{2!}[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]] + \ldots}_{=0 \text{ siehe ÜB}})\hat{F}(t) \\
&= (\hat{X} + \hat{Y} + [\hat{X},\hat{Y}]t)\hat{F}(t)
\end{aligned} \tag{11}
$$

Die auftretende Differentialgleichung wird gelöst durch (Integrationsbedingung $\hat{F}(0) = 1$ wird erfüllt)

$$\hat{F}(t) = e^{(\hat{X}+\hat{Y})t + [\hat{X},\hat{Y}]\frac{t^2}{2}} \tag{12}$$

Da wegen der Voraussetzung $[\hat{X},[\hat{X},\hat{Y}]] = [\hat{Y},[\hat{X},\hat{Y}]] = 0$ gilt $[\hat{X}+\hat{Y},[\hat{X},\hat{Y}]] = 0$ können den Exponenten aufteilen (siehe auch ÜB Nr. 1):

$$\hat{F}(t) = e^{(\hat{X}+\hat{Y})t + [\hat{X},\hat{Y}]\frac{t^2}{2}} = e^{(\hat{X}+\hat{Y})t} e^{[\hat{X},\hat{Y}]\frac{t^2}{2}} \tag{13}$$

Zusammenführen von Gleichung (10) und (13) für $t = 1$ führt schließlich zu

$$e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} = e^{\hat{X}+\hat{Y}} e^{[\hat{X},\hat{Y}]/2} \tag{14}$$

oder

$$e^{\hat{X}+\hat{Y}} = e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} e^{-[\hat{X},\hat{Y}]/2} \tag{15}$$

**2. Wellenpacket und Kontinuitätsgleichung (10 Punkte mündlich)**

(a) (1 Punkt) Gesucht sind die Wellenfunktionen und Dispersionsrelation $E(p)$ für ein freies Teilchen in einer Dimension. Wir lösen die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \tag{16}$$

über den Produktansatz

$$\psi(x,t) = \psi(x) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \tag{17}$$

erhalten wir die stationäre Schrödingergleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x) = E\psi(x). \tag{18}$$

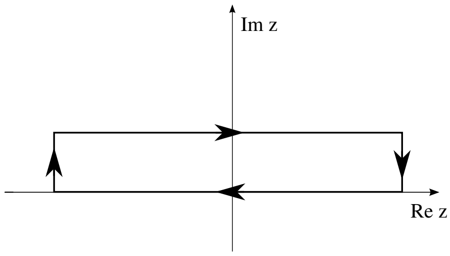
Die Eigenfunktionen dieser Gleichung sind $\psi(x) = Ae^{i\frac{px}{\hbar}}$ mit den Eigenwerten $E(p) = \frac{p^2}{2m}$. Die Wellenfunktionen sind also ebene Wellen

$$\psi(x) = Ae^{\frac{i}{\hbar}(px - E(p)t)}. \tag{19}$$

(b) (1 Punkt) Es soll gezeigt werden, dass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-(x+i\alpha)^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \tag{20}$$

Dazu integrieren wir in der komplexen Ebene und schließen die Kontur entlang der reelen Achse (siehe Skizze).




Da das Integral über die gesamte Kontur verschwindet entspricht das Integral über die Achse $\{k + i\alpha \,|\, k \in (-\infty, \infty)\}$ gerade dem Integral über die reelle Achse.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, e^{-(x+i\alpha)^2} = -\int_{\infty}^{-\infty} \mathrm{d}x\, e^{-x^2} = \sqrt{\pi}. \tag{21}$$

(c) (1 Punk) Zum Zeitpunkt $t = 0$ soll die Wellenfunktion des freien Teilchens durch

$$\psi(x,0) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} \quad \text{mit} \quad g(p) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{p^2}{4\sigma^2}} \tag{22}$$

gegeben sein.

Die Wellenfunktion $\psi(x,0)$ ist damit die Fourier-Transformierte einer Gauß-Funktion. Wie wir sehen werden, ist dies wieder eine Gauß-Funktion. Es muss das Integral

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, \exp\Big(-\frac{p^2}{4\sigma^2} + i\frac{px}{\hbar}\Big) \tag{23}$$

berechnet werden. Dazu machen wir eine quadratische Ergänzung

$$\frac{p^2}{4\sigma^2} - i\frac{px}{\hbar} = \Big(\frac{p^2}{4\sigma^2} - i\frac{px}{\hbar} - \frac{\sigma^2 x^2}{\hbar^2}\Big) + \frac{\sigma^2 x^2}{\hbar^2} = \Big(\frac{p}{2\sigma} - i\frac{\sigma x}{\hbar}\Big)^2 + \frac{\sigma^2 x^2}{\hbar^2}$$

und erhalten

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{\hbar^2}} \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} \, \exp\Big(-\big(\frac{p}{2\sigma} - i\frac{\sigma x}{\hbar}\big)^2\Big). \tag{24}$$

Das verbliebene Integral wurde schon in Aufgabe 2b) gelöst damit ergibt sich

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{\hbar^2}} \frac{2\sigma}{\sqrt{2\hbar}} = \Big(\frac{4\sigma^2}{2\pi\hbar^2}\Big)^{1/4} e^{-\frac{\sigma^2 x^2}{\hbar^2}}. \tag{25}$$

Führt man $a = \frac{\hbar}{2\sigma}$ ein

$$\psi(x,0) = \frac{1}{(2\pi a^2)^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{4a^2}} \tag{26}$$

sieht man, dass es sich wieder um eine Gauß-Kurve handelt, wobei die Breite gerade invers-proportional zur Breite der Impulsverteilung ist.

(d) (3 Punkte) Zuerst ist zu zeigen, dass die Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p) e^{i\frac{px}{\hbar}} e^{-i\frac{E(p)t}{\hbar}} \quad \text{mit} \quad E(p) = \frac{p^2}{2m} \tag{27}$$

die zeitabhängige Schrödingergleichung erfüllt.

Durch Einsetzen in die Schrödingergleichung auf beiden Seiten läßt sich direkt zeigen, dass

$$
\begin{aligned}
-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t) &= -\frac{\hbar^2}{2m}\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p)\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-E(p)t\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p)\frac{p^2}{2m}e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-E(p)t\right)} \qquad (28)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) &= \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p)i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-E(p)t\right)} = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p)E(p)e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-E(p)t\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, g(p)\frac{p^2}{2m}e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-E(p)t\right)}. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Die Schrödingergleichung für das freie Teilchen ist also erfüllt.

Nun soll $\psi(x,t)$ berechnet werden. Dafür muss das Integal

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ \exp\Big(-\frac{p^2}{4\sigma^2}+i\frac{px}{\hbar}-i\frac{E(p)t}{\hbar}\Big) \\
&= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ \exp\Big(-\frac{p^2}{4\sigma^2}+i\frac{px}{\hbar}-i\frac{p^2t}{2m\hbar}\Big)
\end{aligned}
$$

gelöst werden.
Mit der Definition $\frac{1}{\alpha^2}=(\frac{1}{\sigma^2}+i\frac{2t}{m\hbar})$ erhalten wir wieder das Integral aus Aufgabenteil c) und können es analog lösen.

$$
\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}\int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}}\ \exp\Big(-\frac{p^2}{4\alpha^2}+i\frac{px}{\hbar}\Big) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}}e^{-\frac{\alpha^2x^2}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{2}{\hbar}}\alpha \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}}\frac{1}{\sqrt{a(1+i\frac{\hbar t}{2ma^2})}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4a^2(1+i\frac{\hbar t}{2ma^2})}\Big) \qquad (30)
\end{aligned}
$$

wobei wir genutzt $\frac{\hbar^2}{4\alpha^2}=a^2+\frac{i\hbar t}{2m}$ haben.

Damit ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$
\psi^*(x,t)\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{a^2(1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2a^4})}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2a^2(1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2a^4})}\Big). \qquad (31)
$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte hat also eine effektive zeitabhängige Breite $\beta^2=a^2(1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2a^4})$. Das Wellenpacket "zerflie{sst", die breite wächst, die Amplitude nimmt ab:

$$
|\psi(x,t)|^2 = \psi^*(x,t)\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\beta^2}\Big) \qquad (32)
$$

Das die Wellenfunktion immer auf 1 normiert ist erhält man sofort

$$
\int \mathrm{d}x\,|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta^2}}\int \mathrm{d}x\ \exp\Big(-\frac{x^2}{2\beta^2}\Big) = 1.
$$

*Bemerkung: Das die Wellenfunktion zu allen Zeiten auf 1 normiert ist kann man auch ohne die Impulsintegration auszuführen zeigen:*

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{d}x\,\psi(x,t)\psi^*(x,t) &= \int \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}p\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}g(p)g^*(p')e^{\frac{i}{\hbar}\left(px-E(p)t\right)}e^{\frac{i}{\hbar}\left(p'x-E(p')t\right)} \qquad (33) \\
&= \int \mathrm{d}p\mathrm{d}p'\ g(p)g^*(p')e^{-\frac{it}{\hbar}\left(E(p)-E(p')\right)}\frac{1}{\hbar}\underbrace{\int \frac{\mathrm{d}x}{2\pi}e^{\frac{i}{\hbar}(p-p')x}}_{\hbar\delta(p-p')} \qquad (34) \\
&= \int \mathrm{d}p\, g(p)g^*(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int \mathrm{d}p\, e^{-\frac{p^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sqrt{2\sigma^2\pi} = 1 \qquad (35)
\end{aligned}
$$

(e) (3 Punkte) Mit der Wellenfunktion $\psi(x,t)$ können wir nun die Erwartungswerte ausrechnen

$$\langle x\rangle = \int \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t) x \psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\beta^2}\int \mathrm{d}x\, \exp\Big(\frac{-x^2}{2\beta^2}\Big) = 0 \tag{36}$$

$$\langle x^2\rangle = \int \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t) x^2 \psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\beta^2}\int \mathrm{d}x\, x^2 \exp\Big(\frac{-x^2}{2\beta^2}\Big) = \beta^2 \tag{37}$$

$$\langle p\rangle = \int \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t)\Big(\frac{\hbar}{i}\partial_x\Big)\psi(x,t) = \frac{\hbar}{i}\int \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t)\frac{-2x}{a^2(1+i\frac{\hbar t}{2ma^2})}\psi(x,t) = 0 \tag{38}$$

$$\langle p^2\rangle = \int \mathrm{d}x\, \psi^*(x,t)\big(-\hbar^2\partial_x^2\big)\psi(x,t) = \hbar^2\int \mathrm{d}x\, \big(\partial_x\psi^*(x,t)\big)\big(\partial_x\psi(x,t)\big) = \frac{\hbar^2}{4a^2} \tag{39}$$

Die Standardabweichung des Orts ist damit gegeben durch

$$\Delta X(t) = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2} = \beta = a\sqrt{1+\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2a^4}}. \tag{40}$$

Sie ist zeitabhängig und minimal für $t=0$. Die Standardabweichung des Impuls ist

$$\Delta P(t) = \frac{\hbar}{2a} \tag{41}$$

und konstant. Damit gilt

$$\Delta X(t)\cdot\Delta P(t) = \frac{\hbar}{2}\sqrt{1+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2a^4}} \geq \frac{\hbar}{2} \tag{42}$$

Die minimale Unschärfe hat das Wellenpaket also nur zum Zeitpunkt $t=0$!

(f) (1 Punkte) Es ist durch Einsetzen zu zeigen, dass die Wellenfunktion (27) die Kontinuitätsgleichung erfüllt. Zuerst berechnen wir die zeitliche Änderung der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x,t) = \int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}\; g^*(p)g(p')e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}\frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{i}{\hbar}\big(E(p)-E(p')\big)t} \tag{43}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}\; g^*(p)g(p')e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}\frac{i}{\hbar}\Big(E(p)-E(p')\Big)e^{\frac{i}{\hbar}\big(E(p)-E(p')\big)t}, \tag{44}$$

dann die Stromdichte

$$j = \frac{\hbar}{2im}(\psi^*(x,t)\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)) - (\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)^*)\psi(x,t) \tag{45}$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}\; g^*(p)g(p')\Big(e^{-\frac{i}{\hbar}px}\partial_x e^{\frac{i}{\hbar}p'x} - \big(\partial_x e^{-\frac{i}{\hbar}px}\big)e^{\frac{i}{\hbar}p'x}\Big)e^{\frac{i}{\hbar}\big(E(p)-E(p')\big)t} \tag{46}$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}\; g^*(p)g(p')\frac{i}{\hbar}\big(p+p'\big)e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}e^{\frac{i}{\hbar}\big(E(p)-E(p')\big)t} \tag{47}$$

und deren Gradienten

$$\frac{\partial}{\partial x}j = \frac{\hbar}{2im}\int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}\; g^*(p)g(p')\frac{1}{\hbar^2}\big(p+p'\big)\big(p-p'\big)e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}e^{\frac{i}{\hbar}\big(E(p)-E(p')\big)t} \tag{48}$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}p'}{2\pi\hbar}\; g^*(p)g(p')e^{-\frac{i}{\hbar}(p-p')x}\frac{i}{\hbar}\big(\frac{p^2}{2m} - \frac{p'^2}{2m}\big)e^{\frac{i}{\hbar}\big(E(p)-E(p')\big)t}. \tag{49}$$

Da gilt $E(p) = p^2/2m$ ist die Kontinuitätsgleichung erfüllt.