Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 4

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Abgabe: 12.05.2015, Besprechung: 13.05.2015

Vorbemerkung: Impulsdarstellung und Fouriertransformationen

Die Ortsdarstellung der Impulseigenfunktionen (eindimensional)

$$\hat{p} |p\rangle = p |p\rangle \quad (1)$$

ist gegeben durch die Projektion auf den Bra $\langle x|$:

$$\langle x | \hat{p} | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar}{i} \partial_x \langle x | p \rangle = p \langle x | p \rangle \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar}{i} \partial_x \phi_p(x) = p \phi_p(x) \quad (2)$$

sodass:

$$\phi_p(x) = \langle x | p \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \quad (3)$$

Unter Ausnutzung der Orthonormalität und Vollständigkeit der Orts- und Impulseigenfunktionen $|x\rangle, |p\rangle$ (beachte, dass $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$ hermitesche Operatoren sind)

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') \quad \mathbb{1} = \int dx |x\rangle \langle x| \quad (4)$$

$$\langle p | p' \rangle = \delta(p - p') \quad \mathbb{1} = \int dp |p\rangle \langle p| \quad (5)$$

können wir nun einfach jeden Zustand $|\psi\rangle$ in Ortsdarstellung $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ in Impulsdarstellung $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle$ umschreiben via

$$\psi(p) = \langle p | \psi \rangle = \int dx \underbrace{\langle p | x \rangle}_{=\langle x | p \rangle^* = \phi_p^*(x)} \underbrace{\langle x | \psi \rangle}_{\psi(x)} = \int dx \phi_p^*(x) \psi(x) \quad (6)$$

Eine analoge Rechnung vom Impuls- in die Ortsdarstellung liefert insgesamt:

$$\psi(p) = \int dx \phi_p^*(x) \psi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \psi(x) \quad (7)$$

$$\psi(x) = \int dp \phi_p(x) \psi(p) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \psi(p) \quad (8)$$

Die Impuls- und Ortsdarstellung lassen sich also durch Fouriertransformationen (bis auf Faktoren von $\hbar$) ineinander überführen.

1. Impulsdarstellung und Fouriertransformationen (5 Punkte, mündlich)

- (a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Fouriertransformierte und damit die Impulsdarstellung der Delta-Funktion $\delta(x)$. Zeigen Sie damit, dass gilt

$$\delta(x) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \quad (9)$$

- (b) (1 Punkt) Zeige Sie, dass die Fouriertransformierte einer Faltung im Ortsraum im Impulsraum durch ein Produkt schreiben lässt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} \left[\int dx' f(x-x')g(x') \right] = \sqrt{2\pi\hbar} f(p)g(p) \quad (10)$$

- (c) (2 Punkte) Leiten Sie die Impulsdarstellung der Schrödingergleichung ausgehen von ihrer Darstellung im Ortsraum

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (11)$$

her. Fouriertransformieren Sie hierfür beide Seiten der Gleichung (11) via (7). Sie können hierbei nutzen, dass sich $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n$ in eine Potenzreihe entwickeln lassen soll.

- (d) (1 Punkt) Betrachten Sie nun ein konstantes Potential $V(x) = V_0$. Was sind die Eigenfunktionen $\psi(p)$ und die Dispersion E_p des Teilchens?

2. Freies Teilchen im homogenen Feld (6 Punkte, mündlich)

Ein homogenes Feld, das auf ein Teilchen wirkt, wird durch das Potential

$$V(X) = -F \cdot x \quad (12)$$

beschrieben. Die Schrödingergleichung für dieses System hat im Ortsraum die Form der Airy-Differentialgleichung

$$f''(x) - x \cdot f(x) = 0. \quad (13)$$

Im Impulsraum läßt sich die Lösung dieses Problems allerdings leichter finden.

- (a) (1 Punkt) Geben Sie die Impulsraumdarstellung für die Schrödingergleichung eines Teilchens in einem homogenen Feld an.
- (b) (2 Punkt) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\psi(p)$, die diese Differentialgleichung erster Ordnung löst,
- (c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass diese Lösung beim Wechsel zurück in den Ortsraum zu der impliziten Gleichung für die Airy-Funktion

$$A_i(\xi) = \int \frac{du}{\pi} \cos\left(\frac{u^3}{3} + \xi u\right) \quad (14)$$

führt.

3. Projektoren und Spektralzerlegung (9 Punkte, schriftlich)

Sei $\hat{A}$ ein hermitescher Operator mit diskreten, nichtentarteten¹ Spektrum ($n \in \mathbb{N}$)

$$\hat{A} |n\rangle = a_n |n\rangle, \quad (15)$$

wobei a_n der Eigenwert zum (normierten) Eigenzustand $|n\rangle$ ist. Wir definieren

$$\hat{P}_n = |n\rangle \langle n| \quad (16)$$

als den Projektor auf den Eigenraum zum Eigenwert a_n .

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle$ gilt

$$\hat{A} \hat{P}_n |\psi\rangle = a_n \hat{P}_n |\psi\rangle \quad (17)$$

- (b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt

$$\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{n,m} \hat{P}_n \quad (18)$$

- (c) (1 Punkt) Drücken Sie $\hat{A}$ durch die Operatoren $\hat{P}_n$ aus. Nutzen Sie hierzu die Vollständigkeit der $|n\rangle$ Zustände.

- (d) (1 Punkt) Die Wahrscheinlichkeit für einen Zustand $|\psi\rangle$ ein Teilchen mit Eigenwert a_n zu messen ist gegeben durch

$$P_{|\psi\rangle}(n) = |\langle n|\psi\rangle|^2 \quad (19)$$

Drücken Sie $P_{|\psi\rangle}(n)$ durch $\hat{P}_n$ und $|\psi\rangle$ aus.

Sei $\hat{B}$ nun ein hermitescher Operator mit rein kontinuierlichem Spektrum (wie z.B. der Impulsoperator $\hat{p}$):

$$\hat{B} |b\rangle = b |b\rangle \quad (20)$$

Die kontinuierlichen Eigenwerte nennen wir $b \in \mathbb{R}$, die (verallgemeinerten) Eigenzustände $|b\rangle$ besitzen die Eigenschaften

$$\langle b|b'\rangle = \delta(b - b') \quad \int db |b\rangle \langle b| = \mathbf{1}. \quad (21)$$

In Analogie zu (16) definieren wir uns nun für $\alpha < \beta$ den Projektor

$$\hat{P}_{[\alpha,\beta]} = \int_{\alpha}^{\beta} db |b\rangle \langle b| \quad (22)$$

auf das Intervall $[a, b]$.

- (e) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt $\hat{P}_{[\alpha,\beta]} \hat{P}_{[\gamma,\delta]} = \hat{P}_{[\alpha,\beta] \cap [\gamma,\delta]}$
- (f) (1 Punkt) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Messung der Observablen $\hat{B}$ in einem physikalischen System im Zustand $|\psi\rangle$ einen Wert innerhalb des Intervalls $[\alpha, \beta]$ zu messen, durch den Projektor $\hat{P}_{[\alpha,\beta]}$ aus.
- (g) (1 Punkt) Sei nun $\hat{B} = \hat{p}$ der Impulsoperator. Die Wellenfunktion in Impulsdarstellung sei

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} & \text{für } |p| < p_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (23)$$

Berechnen Sie mit Hilfe der obigen Projektoren die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von $|\psi\rangle$ ein Teilchen mit dem Impuls $p > 0$ zu messen.

- (h) (1 Punkt) Berechnen Sie die Ortsdarstellung $\psi(x)$ von der Wellenfunktion (23).

¹d. h. jeder Eigenwert besitzt die algebraische Vielfachheit 1.