Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 4 (Lösungen)
Abgabe: 12.05.2015, Besprechung: 13.05.2015

1. Impulsdarstellung und Fouriertransformationen (6 Punkte, mündlich)

(a) Wir berechnen die Fouriertransformierte bzw. die Impulsdarstellung der $\delta(x)$ Funktion als

$$\delta(p) = \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tag{1}$$

Durch einsetzen dieser Entwicklung in die inverse Fouriertransformation finden wir

$$\delta(x) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}\delta(p) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{ipx/\hbar} = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \tag{2}$$

(b) Betrachte

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\Big[\int \mathrm{d}x'\, f(x-x')g(x')\Big] \qquad (3)\\
&= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\Big[\int \mathrm{d}x' \int \frac{dp'}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip'(x-x')/\hbar} f(p') \int \frac{dp''}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ip''x'/\hbar} g(p'')\Big]\\
&= \int \frac{dp'dp''}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(p')g(p'') \underbrace{\int dx e^{i(p'-p)x/\hbar}}_{=2\pi\delta(\frac{p'-p}{\hbar})} \underbrace{\int dx' e^{i(p''-p')x'/\hbar}}_{=2\pi\delta(\frac{p''-p'}{\hbar})}\\
&= \int \frac{dp'dp''}{(2\pi\hbar)^{3/2}} f(p')g(p'') 2\pi\hbar\delta(p'-p) 2\pi\hbar\delta(p''-p') = \sqrt{2\pi\hbar} f(p)g(p) \qquad (4)
\end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben $\delta(a\cdot x) = 1/a \cdot \delta(x)$.

(c) Betrachte die Schrödingergleichung im Ortsraum

$$\big[-\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} + V(x)\big]\psi(x) = E\psi(x) \tag{5}$$

und transformiere diese in den Impulsraum durch die auf dem Übungsblatt angegebene Fouriertransformation

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar}\big[-\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m} + V(x)\big]\psi(x) = \underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-ipx/\hbar} E\psi(x)}_{E\psi(p)} \tag{6}$$

Wende nun zwei mal eine partielle Integration auf der linken Seite an

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) \big[\underbrace{-\frac{\hbar^2\partial_x^2}{2m}}_{=p^2/2m} + V(x)\big] e^{-ipx/\hbar} = E\psi(p) \tag{7}$$

und schreibe $V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n x^n$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) \big[\frac{p^2}{2m} + \sum_{n=0}^{\infty} V_n \underbrace{x^n}_{(-\hbar/i\,\partial_p)^n} \big] e^{-ipx/\hbar} = E\psi(p) \tag{8}$$

$$\big[\frac{p^2}{2m} + \sum_{n=0}^{\infty} V_n (-\hbar/i\,\partial_p)^n \big] \int \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} \psi(x) e^{-ipx/\hbar} = E\psi(p) \tag{9}$$

$$\big[\frac{p^2}{2m} + \sum_{n=0}^{\infty} V_n (-\hbar/i\,\partial_p)^n \big] \psi(p) = E\psi(p) \tag{10}$$

$$\big[\frac{p^2}{2m} + V(-\hbar/i\,\partial_p) \big] \psi(p) = E\psi(p) \tag{11}$$

(d) Für ein konstantes Potential $V(x) = V_0$ ist die Schrödingergleichung in Impulsdarstellung gerade

$$[\frac{p^2}{2m} + V(-\hbar/i\,\partial_p)]\psi(p) = E\psi(p) \tag{12}$$

$$[\frac{p^2}{2m} + V_0]\psi(p) = E\psi(p) \tag{13}$$

Offensichtlich steht mit $[\frac{p^2}{2m} + V_0]$ links eine Funktion von p vor $\psi(p)$ und rechts eine konstante E. Die Gleichung kann dann nur erfüllt sein, wenn $\psi(p) = \delta(p - p_0)$ mit $p_0 \in \mathbb{R}$ ist, sodass

$$[\frac{p^2}{2m} + V_0] \underbrace{\psi(p)}_{\delta(p-p_0)} = E\psi(p) \tag{14}$$

$$[\frac{p_0^2}{2m} + V_0]\delta(p - p_0) = E\delta(p - p_0) \tag{15}$$

sodass für die Dispersion/Energie gilt

$$E = E_{p_0} = V_0 + \frac{p_0^2}{2m} \tag{16}$$

Dies ist natürlich gerade die Dispersion eines freien Teilchens im konstanten Potential V_0 (was natürlich nichts aussagt außer der Position des Energienullpunkts).

2. Freies Teilchen im homogenen Feld (6 Punkte, mündlich)

(a) Im Impulsraum ist die Schrödinger-Gleichung gegeben durch die Differentialgleichung erster Ordnung

$$-\frac{p^2}{2m}\psi(p) - i\hbar F \frac{\mathrm{d}\psi(p)}{\mathrm{d}p} = E\psi(p). \tag{17}$$

(b) Diese Differentialgleichung läßt sich durch Trennung der Veränderlichen

$$-i\frac{1}{\psi}\mathrm{d}\psi = \frac{1}{\hbar F}\Big(E - \frac{p^2}{2m}\Big)\mathrm{d}p \tag{18}$$

und Integration auf beiden Seiten

$$-i\log\Big(\frac{\psi(p)}{\psi_0}\Big) = \frac{1}{\hbar F}\Big(Ep - \frac{p^3}{6m}\Big) \tag{19}$$

lösen. Damit erhält man für die Wellenfunktion im Impulsraum

$$\psi(p) \propto \exp\Big(i\frac{E}{\hbar F}p - i\frac{p^3}{6m\hbar F}\Big). \tag{20}$$

(c) Wechselt man zurück in den Ortsraum

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{i\frac{px}{\hbar}} \psi(p) \tag{21}$$

erhält man das Integral

$$\psi(x) \propto \int \mathrm{d}p \, \exp\Big(i\Big[\frac{p}{\hbar}(x + \frac{E}{F}) - \frac{p^3}{6m\hbar F}\Big]\Big). \tag{22}$$

Betrachtet man die Gleichung sieht man zuerst, dass die Energie E nur als Verschiebung um $x_0 = -\frac{E}{F}$ eingeht. Dies ist gerade der klassische Umkehrpunkt, bei dem $E = V(x_0)$ gilt. Zum anderen erhalten wir eine Längenskala ℓ

$$\ell^3 = \frac{\hbar^2}{2m|F|} \tag{23}$$

$$\psi(x) \propto \int \frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\Big(i\Big[\frac{p\ell}{\hbar}\frac{x - x_0}{\ell} - \mathrm{sign}(F)\frac{p^3\ell^3}{3}\Big]\Big). \tag{24}$$

Führen wir die dimensionslosen Variablen

$$\xi = (x - x_0)/\ell \quad \text{und} \quad u = p\ell/\hbar \tag{25}$$

ein benutzen die Eulersche Formel und berücksichtigen, dass $\sin(x)$ eine ungerade Funktion ist erhalten wir damit

$$\psi(\xi) \propto \int \mathrm{d}u \, \cos\Big(\frac{u^3}{3} - \mathrm{sign}(F)\xi u\Big). \tag{26}$$

Dies ist gerade die implizite Gleichung für die Airy-Funktion, wobei

$$\psi(\xi) \propto A_i(-\mathrm{sign}(F)\xi). \tag{27}$$

Nebenbemerkung:
Setzt man die dimensionslosen Variablen ξ und u in die Schrödinger-Gleichung ein, erhält man ($\bar{\xi} = -\mathrm{sign}(F)\xi$) die Airy-Differentialgleichung

$$\psi''(\bar{\xi}) - \bar{\xi}\psi(\bar{\xi}) = 0. \tag{28}$$

Diese hat zwei linear unabhängige Lösungen, die Airy-Funktionen A_i und B_i (siehe Abb. 1), wobei $B_i(\bar{\xi})$ für $x \to \infty$ divergiert[1] und damit keine physikalische Lösung für

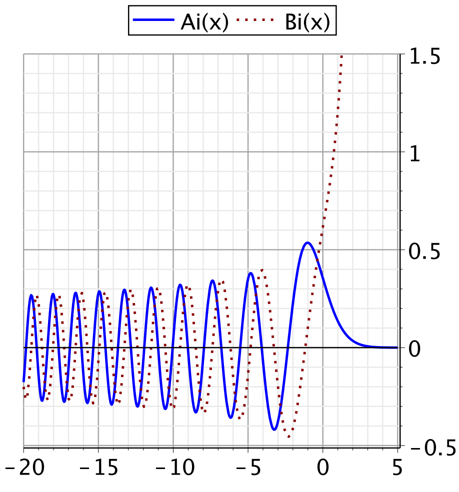

Abbildung 1: Airy-Funktionen

das freie Teilchen ist.

[1] Das genaue Verhalten ist

$$\mathrm{Ai}(\xi) \to \frac{e^{-\frac{2}{3}\xi^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}\,\xi^{1/4}}, \quad \mathrm{Bi}(\xi) \to \frac{e^{\frac{2}{3}\xi^{3/2}}}{\sqrt{\pi}\,\xi^{1/4}} \quad \text{für } \xi \to \infty,$$

3. Projektoren und Spektralzerlegung (8 Punkte, schriftlich)

(a) Wir entwickeln den Zustand $|\psi\rangle$ in die Eigenzustände des hermiteschen Operators $\hat{A}$ (da dessen Eigenzustände durch die Hermitizität vollständig $\mathbb{1} = \sum_m |n\rangle \langle n|$ und orthonormal $\langle n \mid m\rangle = \delta_{n,m}$ sind)

$$|\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n \mid \psi\rangle}_{\psi_n} = \sum_n \psi_n |n\rangle \tag{29}$$

Damit folgt

$$\hat{P}_n |\psi\rangle = |n\rangle \langle n| \sum_m \psi_m |m\rangle = |n\rangle \sum_m \psi_m \underbrace{\langle n \mid m\rangle}_{\delta_{n,m}} = \psi_n |n\rangle \tag{30}$$

Offensichtlich ist $\hat{P}_n$ wirklich der Projektor auf den $|n\rangle$ Zustand und es gilt

$$\hat{A}\hat{P}_n |\psi\rangle = \psi_n \hat{A} |n\rangle = \psi_n a_n |n\rangle = a_n \psi_n |n\rangle = a_n \hat{P}_n |\psi\rangle \tag{31}$$

(b) Unter Ausnutzung der Orthogonalität der Eigenzustände von $\hat{A}$ ist einfach zu zeigen, dass

$$\hat{P}_n \hat{P}_m = |n\rangle \underbrace{\langle n \mid m\rangle}_{\delta_{n,m}} \langle m| = \delta_{n,m} |n\rangle \langle n| = \delta_{n,m} \hat{P}_n \tag{32}$$

(c) Wir können $\hat{A}$ in die Eigenzustände entwickeln durch

$$\hat{A} = \mathbb{1}\hat{A}\mathbb{1} = \sum_{n,m} |n\rangle \langle n \mid \hat{A} \mid m\rangle \langle m| = \sum_{n,m} a_m |n\rangle \langle n \mid m\rangle \langle m| = \sum_n a_n |n\rangle \langle n| = \sum_n a_n \hat{P}_n \tag{33}$$

(d) Wir können die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $|\psi\rangle$ den Eigenwert a_n zu messen ausdrücken durch

$$P_{|\psi\rangle}(n) = |\langle n \mid \psi\rangle|^2 = (\langle n \mid \psi\rangle)^* \langle n \mid \psi\rangle = \langle \psi \mid n\rangle \langle n \mid \psi\rangle = \langle \psi \mid \hat{P}_n \mid \psi\rangle = \langle \hat{P}_n \rangle \tag{34}$$

(e) Wir betrachten

$$\hat{P}_{[\alpha,\beta]} \hat{P}_{[\gamma,\delta]} = \int_\alpha^\beta db \int_\gamma^\delta db' \, |b\rangle \underbrace{\langle b \mid b'\rangle}_{\delta(b-b')} \langle b'|$$

und teilen nun das erste Integral auf [2]

$$\int_\alpha^\beta db = \int_\alpha^\beta \Big|_{b\in[\gamma,\delta]} db + \int_\alpha^\beta \Big|_{b\notin[\gamma,\delta]} db \tag{36}$$

sodass

$$\begin{aligned}\hat{P}_{[\alpha,\beta]} \hat{P}_{[\gamma,\delta]} &= \int_\alpha^\beta \Big|_{b\in[\gamma,\delta]} db \int_\gamma^\delta db' \delta(b-b') |b\rangle \langle b'| + \underbrace{\int_\alpha^\beta \Big|_{b\notin[\gamma,\delta]} db \int_\gamma^\delta db' \delta(b-b') |b\rangle \langle b'|}_{=0} \\ &= \int_\alpha^\beta \Big|_{b\in[\gamma,\delta]} db \, |b\rangle \langle b| = \int_{[\alpha,\beta]\cap[\gamma,\delta]} db \, |b\rangle \langle b| = \hat{P}_{[\alpha,\beta]\cap[\gamma,\delta]}\end{aligned} \tag{37}$$

[2] Wir nutzen hier mathematisch die Eigenschaft, dass für Intervalle (oder Mengen) gilt

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \tag{35}$$

(f) Wir drücken zunächst $|\psi\rangle$ durch die $|b\rangle$ Eigenzustände aus

$$|\psi\rangle = \mathbb{1}\,|\psi\rangle = \int db\,|b\rangle \underbrace{\langle\, b \mid \psi\,\rangle}_{\psi(b)} = \int db\,\psi(b)\,|b\rangle \tag{38}$$

Die Wahrscheinlichkeit für $|\psi\rangle$ im Zustand b zu sein ist dann gegeben durch $|\psi(b)|^2\,db$ gegeben. Damit folgt für die Wahrscheinlichkeit einen Wert zwischen $b \in [\alpha,\beta]$ zu messen

$$\begin{aligned} W([\alpha,\beta]) &= \int_\alpha^\beta \,|\psi(b)|^2\,db = \int_\alpha^\beta db\,\langle\, b \mid \psi\,\rangle^* \langle\, b \mid \psi\,\rangle = \langle\psi|\,\Big[\int_\alpha^\beta db\,\,|b\rangle\,\langle b|\Big]\,|\psi\rangle \\ &= \langle\, \psi \mid \hat{P}_{[\alpha,\beta]} \mid \psi\rangle = \langle\, \hat{P}_{[\alpha,\beta]}\,\rangle \end{aligned} \tag{39}$$

(g) Nach der Aufgabenstellung ist

$$|\psi\rangle = \int dp\,|p\rangle\,\langle\, p \mid \psi\,\rangle = \int dp\,\psi(p)\,|p\rangle \qquad ,\psi(p) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2p_0}} & \text{für } \;|p| < p_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{40}$$

Mit (39) ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass für den Zustand ein Impuls mit $p > 0$ gemessen wird

$$W([0,\infty]) = \int_0^\infty \,|\psi(p)|^2\,dp = \int_0^{p_0} \frac{1}{2p_0}\,dp = \frac{1}{2} = 50\% \tag{41}$$