

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN

Blatt 5

DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Abgabe: 19.05.2015, Besprechung: 20.05.2015**1. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung (3 Punkte, mündlich)**

Leiten Sie die Cauchy-Schwarzschen Ungleichungen her, indem Sie die Norm von $\|x - \lambda y\|^2 = (\langle x | -\lambda^* \langle y |)(|x\rangle - \lambda |y\rangle) \geq 0$ nach $\lambda \in \mathbb{C}$ minimieren.

2. Hermite'sche Polynome (6 Punkte, mündlich)

In der Vorlesung wird die Herleitung der Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + \frac{m\omega^2}{2}x^2\right)\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \quad E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

besprochen. Diese Eigenfunktionen stehen in engem Zusammenhang zu den Hermite'schen Polynomen

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \partial_z^n e^{-z^2}, \quad n \geq 0$$

- (a) (2 Punkte) Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion e^{-t^2+2zt} die erzeugende Funktion der Hermite'schen Polynome ist, d.h.

$$e^{-t^2+2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z). \quad (1)$$

[Hinweis: Verwenden Sie die Taylorentwicklung von $e^{-(z-t)^2}$ um $t = 0$.]

- (b) (2 Punkte) Leiten Sie mit Hilfe von (1) die folgenden Rekursionsrelationen für H_n her:

$$\partial_z H_n(z) = 2n H_{n-1}(z), \quad n \geq 1 \quad (2)$$

und

$$H_{n+1}(z) = 2z H_n(z) - 2n H_{n-1}(z), \quad n \geq 1 \quad (3)$$

Leiten Sie mit Hilfe von Gl.(2) und (3) die Differenzialgleichung

$$[\partial_z^2 - 2z\partial_z + 2n]H_n(z) = 0 \quad (4)$$

her.

[Hinweis: Gl.(2) und (3) kann man beweisen, indem man Gl.(1) nach z bzw. nach t ableitet.]

- (c) (2 Punkte) Zeigen Sie die Orthogonalität der Hermite'schen Polynome,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_n(z) H_m(z) = 0, \quad \text{für } n \neq m \quad (5)$$

[Hinweis: Multiplizieren Sie dazu die linke Seite von Gl. (4) mit $H_m(z)e^{-z^2}$ und integrieren Sie über z . Subtrahieren Sie die entsprechende Gleichung, in der Sie m und n vertauschen.]

3. Zweidimensionaler Harmonischer Oszillator (11 Punkte, schriftlich)

Wir betrachten den zweidimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2) \quad (6)$$

wobei wie immer gilt $[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$ und $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$ für $j, k = 1, 2$.

- (a) (1 Punkt) Leiten Sie, ausgehend von der Heisenberg'schen Unschärferelation, eine untere Grenze für die Grundzustandsenergie des zweidimensionalen harmonischen Oszillators her.
- (b) (2 Punkte) Aus den Orts- und Impulsoperatoren $\hat{x}_j, \hat{p}_j$ definieren wir uns sogenannte Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_j$ via

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \alpha \hat{x}_j + i\beta \hat{p}_j \\ \hat{a}_j^\dagger &= \alpha \hat{x}_j - i\beta \hat{p}_j \end{aligned} \quad (7)$$

mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie α und β so, dass gilt

$$\begin{aligned} [\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] &= \delta_{j,k} \\ [\hat{a}_j, \hat{a}_k] &= [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0 \\ \hat{H} &= \sum_{j=1}^2 \epsilon \left[\hat{N}_j + \frac{1}{2} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

wobei $\hat{N}_j := \hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j$. Wodurch ist ϵ gegeben?

- (c) (1 Punkt) Zeigen Sie die Identitäten

$$\begin{aligned} [\hat{N}_j, \hat{a}_k] &= -\hat{a}_j \delta_{j,k} \\ [\hat{N}_j, \hat{a}_k^\dagger] &= \hat{a}_j^\dagger \delta_{j,k} \\ [\hat{N}_j, \hat{N}_k] &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

- (d) (2 Punkte) Wegen $[\hat{N}_1, \hat{N}_2] = 0$ können wir für $\hat{N}_1$ und $\hat{N}_2$ gemeinsame Eigenzustände finden

$$\begin{aligned} \hat{N}_1 |n_1, n_2\rangle &= n_1 |n_1, n_2\rangle \\ \hat{N}_2 |n_1, n_2\rangle &= n_2 |n_1, n_2\rangle \end{aligned} \quad (10)$$

Berechnen Sie die Wirkung von $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$ auf den Zustand $|n_1, n_2\rangle$. Berechnen Sie hierzu die Eigenwerte von $\hat{N}_1$ und $\hat{N}_2$ von den jeweiligen Zuständen $\hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle, \hat{a}_2 |n_1, n_2\rangle, \hat{a}_1^\dagger |n_1, n_2\rangle, \hat{a}_2^\dagger |n_1, n_2\rangle$.

- (e) (2 Punkte) Was sind nun die Eigenzustände und Eigenenergien des zweidimensionalen harmonischen Oszillators? Wieso muss gelten $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$? (*Hinweis: Sie können verwenden, dass wir in der Teilaufgabe (a) gezeigt haben, dass die Energie(eigenwerte) nach unten beschränkt sind.*)
- (f) (2 Punkte) Berechnen Sie die Energieentartung des zweidimensionalen harmonischen Oszillators (also wie viele Eigenzustände dieselbe Eigenenergie besitzen).
- (g) (1 Punkt) Was sind die Eigenzustände und Eigenenergien des d -dimensionalen harmonischen Oszillators? Was ist die Grundzustandsenergie in diesem Fall?