Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 5 (Lösungen)
Abgabe: 19.05.2015, Besprechung: 20.05.2015

---

1. Cauchy-Schwarzsche Ungleichung(3 Punkte, mündlich)

Wir betrachten die Norm

$$|| \, x - \lambda y \, ||^2 = \big(\langle x| - \lambda^* \, \langle y|\big)\big(|x\rangle - \lambda \, |y\rangle\big) = \langle x|x\rangle - \lambda \, \langle x|y\rangle - \lambda^* \langle y|x\rangle + \lambda\lambda^* \, \langle y|y\rangle \geq 0 \tag{1}$$

Wir minimieren nun die Norm, indem wir nach λ ableiten

$$\frac{d|| \, x - \lambda y \, ||^2}{d\lambda} = -\, \langle x|y\rangle + \lambda^* \, \langle y|y\rangle \stackrel{!}{=} 0 \tag{2}$$

sodass wir finden

$$\lambda^* = \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle} \tag{3}$$

Komplex konjugieren führt auf [1]

$$\lambda = \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} \tag{4}$$

Einsetzten von (3) und (4) in die Norm (1) führt zu

$$\begin{aligned}
\langle x|x\rangle - \lambda \, \langle x|y\rangle - \lambda^* \, \langle y|x\rangle + \lambda\lambda^* \, \langle y|y\rangle &\geq 0 \\
\langle x|x\rangle - \frac{\langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle} \, \langle x|y\rangle - \frac{\langle x|y\rangle}{\langle y|y\rangle} \, \langle y|x\rangle + \frac{\langle x|y\rangle \, \langle y|x\rangle}{\langle y|y\rangle^2} \, \langle y|y\rangle &\geq 0 \\
\langle x|x\rangle - \frac{|\langle x|y\rangle|^2}{\langle y|y\rangle} &\geq 0 \\
\langle x|x\rangle \, \langle y|y\rangle &\geq |\langle x|y\rangle|^2
\end{aligned}$$

womit die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung bewiesen ist.

---

[1] Wir könnten alternativ auch $|| \, x - \lambda y \, ||^2$ nach λ^* minimieren.

2. Hermite'sche Polynome (6 Punkte, mündlich)

Die Hermite'schen Polynome sind gegeben durch

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \partial_z^n e^{-z^2}$$

(a) Zunächst zeigen wir, dass die Funktion e^{-t^2+2zt} die erzeugende Funktion der Hermite'schen Polynome ist, d.h.

$$F(z,t) \equiv e^{-t^2+2zt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z). \tag{5}$$

Dafür nutzen wir den Hinweis auf dem Aufgabenblatt aus,

$$\begin{aligned} e^{-t^2+2zt} = e^{z^2-z^2-t^2+2zt} = e^{z^2} e^{-(z-t)^2} &= e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \partial_t^n e^{-(z-t)^2} \Big|_{t=0} \\ &= e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n \partial_z^n e^{-(z-t)^2} \Big|_{t=0} \\ &= e^{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} (-1)^n \partial_z^n e^{-z^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(z) \end{aligned}$$

(b) Wieder nutzen wir den Hinweis, um die Rekursionsrelationen für H_n herzuleiten:

$$\begin{aligned} \partial_z F = 2tF = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \partial_z H_n(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \partial_z H_{n+1}(z) \\ \to 2tF = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n!} H_n(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \partial_z H_{n+1}(z) \end{aligned}$$

Hier wurde ausgenutzt, dass $\partial_z H_0 = 0$ ist. Ein Koeffizientenvergleich liefert die erste Rekursionsgleichung

$$\partial_z H_n(z) = 2n\, H_{n-1}(z). \tag{6}$$

Wenn wir F nach t ableiten, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \partial_t F &= (-2t + 2z) e^{-t^2+2zt} \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{n+1}}{n!} H_n(z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2zt^n}{n!} H_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{nt^{n-1}}{n!} H_n(z) \\ \to &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(z) + \frac{2zt^n}{n!} H_n(z) - \frac{(n+1)t^n}{(n+1)!} H_{n+1}(z) = 0 \end{aligned}$$

Hierbei sind H_{-1} und H_{-2} nicht definiert. Wir setzen diese daher formhalber gleich null. Ein Koeffizientenvergleich sogleich

$$-2nH_{n-1}(z) + 2zH_n(z) - H_{n+1}(z) = 0$$

und damit

$$H_{n+1}(z) = 2z\, H_n(z) - 2nH_{n-1}(z) \tag{7}$$

Mit Hilfe der beiden Rekursionsgleichung lässt sich die Differentialgleichung für die Hermite'schen Polynome herleiten

$$\begin{aligned} \partial_z^2 H_n &= 2n\partial_z H_{n-1} = 4n(n-1)H_{n-2} \\ -2z\partial_z H_n &= -4nzH_{n-1} \end{aligned}$$

Mit (7) erhalten wir dann

$$4n(n-1)H_{n-2} - 4nzH_{n-1} + 2nH_n = \left[\partial_z^2 - 2z\partial_z + 2n\right] H_n(z) = 0 \tag{8}$$

(c) Multiplizieren wir die DGL (8) von links mit $e^{-z^2}H_m$ und integrieren über z, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_m\big(\partial_z^2 - 2z\partial_z\big)H_n = -2n\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} H_m(z)H_n(z)$$

Die partielle Integration der linken Seite liefert

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_m\big(\partial_z^2 - 2z\partial_z\big)H_n &= e^{-z^2}H_m\partial_z H_n\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dz\Big(\partial_z e^{-z^2}H_m\Big)\partial_z H_n \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} dz e^{-z^2} H_m\big(-2z\partial_z\big)H_n \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} d e^{-z^2}\big(\partial_z H_m\big)\big(\partial_z H_n\big)\end{aligned}$$

Damit

$$-\int_{-\infty}^{\infty} d e^{-z^2}\big(\partial_z H_m\big)\big(\partial_z H_n\big) = -2n\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} H_m(z)H_n(z)$$

vertauschen wir m und n, so haben wir

$$-\int_{-\infty}^{\infty} d e^{-z^2}\big(\partial_z H_n\big)\big(\partial_z H_m\big) = -2m\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} H_m(z)H_n(z)$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen, so ergibt sich

$$(2n-2m)\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} H_m(z)H_n(z) = 0$$

Damit muss für $m \neq n$ gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-z^2} H_m(z)H_n(z) = 0$$

3. Zweidimensionaler Harmonischer Oszillator (11 Punkte, schriftlich)

(a) Da das HO Potential symmetrisch um 0 ist, sollte die Grundzustand ebenfalls symmetrisch (oder antisymmetrisch) sein und damit $\langle\, \hat{x}_j \,\rangle = \langle\, \hat{p}_j \,\rangle = 0$ gelten. Somit gilt für $j = 1, 2$

$$\langle\, (\Delta\hat{x}_j)^2 \,\rangle = \langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle - \langle\, \hat{x}_j \,\rangle^2 = \langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle \qquad \langle\, (\Delta\hat{p}_j)^2 \,\rangle = \langle\, \hat{p}_j^2 \,\rangle - \langle\, \hat{p}_j \,\rangle^2 = \langle\, \hat{p}_j^2 \,\rangle \tag{9}$$

Wir nutzen nun die Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\langle\, (\Delta\hat{x}_j)^2 \,\rangle\langle\, (\Delta\hat{p}_j)^2 \,\rangle \geq \frac{|\langle\, [\hat{x}_j, \hat{p}_j] \,\rangle|^2}{4} = \frac{\hbar^2}{4} \tag{10}$$

Kombinieren von (9) und (10) führt zu

$$\langle\, \hat{p}_j^2 \,\rangle \geq \frac{\hbar^2}{4\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle} \tag{11}$$

Die Energie ist gegeben durch den Erwartungswert des Hamiltonoperators

$$\begin{aligned}E = \langle\, \hat{H} \,\rangle &= \frac{\langle\, \hat{p}_1^2 \,\rangle + \langle\, \hat{p}_2^2 \,\rangle}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\big(\langle\, \hat{x}_1^2 \,\rangle + \langle\, \hat{x}_2^2 \,\rangle\big) \\ &\geq \frac{\hbar^2}{8m}\left[\frac{1}{\langle\, \hat{x}_1^2 \,\rangle} + \frac{1}{\langle\, \hat{x}_2^2 \,\rangle}\right] + \frac{m\omega^2}{2}\big(\langle\, \hat{x}_1^2 \,\rangle + \langle\, \hat{x}_2^2 \,\rangle\big)\end{aligned} \tag{12}$$

Wir minimieren nun den Ausdruck [2]

$$\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle} + \frac{m\omega^2}{2}\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle \geq \frac{\hbar\omega}{2} \tag{15}$$

Damit gilt nun

$$E = \langle\, \hat{H} \,\rangle = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle} + \frac{m\omega^2}{2}\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle\right] \geq \sum_{j=1}^{2}\frac{\hbar\omega}{2} = \hbar\omega \tag{16}$$

(b) Durch die Vertauschungsrelationen $[\hat{x}_j, \hat{x}_k] = [\hat{p}_j, \hat{p}_k] = 0$ und $[\hat{x}_j, \hat{p}_k] = i\hbar\delta_{j,k}$ für $j, k = 1, 2$ gilt automatisch für die Erzeuger und Vernichter

$$\begin{aligned} \hat{a}_j &= \alpha\hat{x}_j + i\beta\hat{p}_j \\ \hat{a}_j^\dagger &= \alpha\hat{x}_j - i\beta\hat{p}_j \end{aligned} \tag{17}$$

dass

$$[\hat{a}_j, \hat{a}_k] = [\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k^\dagger] = 0 \tag{18}$$

Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} [\hat{a}_j, \hat{a}_k^\dagger] &= [\alpha\hat{x}_j + i\beta\hat{p}_j, \alpha\hat{x}_k - i\beta\hat{p}_k] = \alpha^2[\hat{x}_j, \hat{x}_k] + i\alpha\beta[\hat{p}_j, \hat{x}_k] - i\alpha\beta[\hat{x}_j, \hat{p}_k] + \beta^2[\hat{p}_j, \hat{p}_k] \\ &= 2\hbar\alpha\beta\delta_{j,k} \overset{!}{=} \delta_{j,k} \end{aligned} \tag{19}$$

sodass

$$\beta = \frac{1}{2\hbar\alpha} \tag{20}$$

Durch das Invertieren von (17) bekommen wir

$$\begin{aligned} \hat{x}_j &= \frac{\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger}{2\alpha} \\ \hat{p}_j &= \frac{\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger}{2i\beta} \overset{(20)}{=} \frac{\hbar\alpha}{i}(\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger) \end{aligned} \tag{21}$$

Setze dies in den Hamiltonoperator ein:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}_j^2\right] = \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{-\hbar^2\alpha^2}{2m}(\hat{a}_j - \hat{a}_j^\dagger)^2 + \frac{m\omega^2}{8\alpha^2}(\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2}\left[\Big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\Big)(\hat{a}_j\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j^\dagger) + \Big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\Big)\Big(\underbrace{\hat{a}_j\hat{a}_j^\dagger}_{[\hat{a}_j,\hat{a}_j^\dagger]+\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j} + \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j\Big)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2}\left[\Big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\Big)(\hat{a}_j\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j^\dagger) + \Big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\Big)(2\hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j + 1)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2}\left[\Big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\Big)(\hat{a}_j\hat{a}_j + \hat{a}_j^\dagger\hat{a}_j^\dagger) + 2\Big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} + \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}\Big)(\hat{N}_j + 1/2)\right] \overset{!}{=} \sum_{j=1}^{2}\epsilon\Big[\hat{N}_j + \frac{1}{2}\Big] \end{aligned} \tag{22}$$

---

[2] indem wir die Ableitung nach $\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle$ gleich 0 setzen:

$$\frac{d}{d\langle\, \hat{x}_j \,\rangle^2}\left[\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle} + \frac{m\omega^2}{2}\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle\right] = -\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle^2} + \frac{m\omega^2}{2} \overset{!}{=} 0 \quad \to \langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{13}$$

und $\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}$ nun wieder einsetzen:

$$\frac{\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle} + \frac{m\omega^2}{2}\langle\, \hat{x}_j^2 \,\rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m}\frac{2m\omega}{\hbar} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{\hbar\omega}{2} \tag{14}$$

Im Vergleich sehen wir, dass gelten muss

$$\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} - \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} \stackrel{!}{=} 0 \qquad \to \qquad \alpha^2 = \frac{m\omega}{2\hbar} \qquad \to \qquad 2\big(\frac{m\omega^2}{8\alpha^2} + \frac{\alpha^2\hbar^2}{2m}\big) = \hbar\omega \tag{23}$$

sodass

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{2} \underbrace{\hbar\omega}_{\epsilon} [\hat{N}_j + \frac{1}{2}] \tag{24}$$

(c) Wir berechnen

- $[\hat{N}_j, \hat{a}_k] = [\hat{a}_j^\dagger \hat{a}_j, \hat{a}_k] = \hat{a}_j^\dagger \underbrace{[\hat{a}_j, \hat{a}_k]}_{=0} + \underbrace{[\hat{a}_j^\dagger, \hat{a}_k]}_{=-[\hat{a}_k, \hat{a}_j^\dagger] = -\delta_{j,k}} \hat{a}_j = -\delta_{j,k}\hat{a}_j$
- $[\hat{N}_j, \hat{a}_k^\dagger] = ([\hat{a}_k, \hat{N}_j])^\dagger = (-[\hat{N}_j, \hat{a}_k])^\dagger = (\delta_{j,k}\hat{a}_j)^\dagger = \delta_{j,k}\hat{a}_j^\dagger$
- Für $j = k$ gilt

$$[\hat{N}_j, \hat{N}_j] = 0 \tag{25}$$

und für $j \neq k$ auch

$$[\hat{N}_j, \hat{N}_j] = 0 \tag{26}$$

da die $\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger$ mit den $\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger$ vertauschen.

(d) Betrachte die Wirkung von $\hat{a}_j$ auf den Zustand $|n_1, n_2\rangle$. Hier gilt:

$$\begin{aligned} \hat{N}_k \hat{a}_j |n_1, n_2\rangle &= \big(\underbrace{[\hat{N}_k, \hat{a}_j]}_{-\delta_{j,k}\hat{a}_j} + \hat{a}_j \hat{N}_k\big) |n_1, n_2\rangle = \hat{a}_j(\hat{N}_k - \delta_{j,k}) |n_1, n_2\rangle = \hat{a}_j(n_k - \delta_{j,k}) |n_1, n_2\rangle \\ &= (n_k - \delta_{j,k})\hat{a}_j |n_1, n_2\rangle \end{aligned} \tag{27}$$

Offensichtlich ist also $\hat{a}_j |n_1, n_2\rangle$ ein Eigenzustand zu $\hat{N}_k$ mit Eigenwert $(n_k - \delta_{j,k})$. Damit gilt also

$$\hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle = c_1 |n_1 - 1, n_2\rangle \tag{28}$$

$$\hat{a}_2 |n_1, n_2\rangle = c_2 |n_1, n_2 - 1\rangle \tag{29}$$

Die Absteigeoperatoren $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ reduzieren also ihre jeweilige Quantenzahl um 1. Wir wollen nun noch c_1 und c_2 bestimmen. Dies können wir machen über

$$\begin{aligned} ||\, \hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle \,||^2 &= ||\, c_1 |n_1 - 1, n_2\rangle \,||^2 \\ \langle\, n_1, n_2 \mid \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \mid n_1, n_2\rangle &= |c_1|^2 \langle n_1 - 1, n_2 | n_1 - 1, n_2\rangle \\ \langle\, n_1, n_2 \mid \hat{N}_1 \mid n_1, n_2\rangle &= |c_1|^2 \\ n_1 \langle n_1, n_2 | n_1, n_2\rangle &= |c_1|^2 \\ n_1 &= |c_1|^2 \qquad \to \qquad c_1 = \sqrt{n_1} \end{aligned} \tag{30}$$

und analog finden wir $c_2 = \sqrt{n_2}$, sodass

$$\hat{a}_1 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1}\, |n_1 - 1, n_2\rangle \tag{31}$$

$$\hat{a}_2 |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2}\, |n_1, n_2 - 1\rangle \tag{32}$$

Auf dieselbe Weise finden wir

$$\hat{a}_1^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1 + 1}\, |n_1 + 1, n_2\rangle \tag{33}$$

$$\hat{a}_2^\dagger |n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_2 + 1}\, |n_1, n_2 + 1\rangle \tag{34}$$

(e) Die gemeinsamen Eigenzustände $|n_1, n_2\rangle$ von $\hat{N}_1$ und $\hat{N}_2$ sind gerade auch die Eigenzustände von $\hat{H}$

$$\hat{H}\,|n_1, n_2\rangle = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega\big[\hat{N}_j + 1/2\big]\,|n_1, n_2\rangle = \underbrace{\sum_{j=1}^{2} \hbar\omega\big[n_j + 1/2\big]}_{E_{n_1,n_2}}\,|n_1, n_2\rangle \tag{35}$$

sodass die Eigenenergien gegeben sind durch

$$E_{n_1,n_2} = \sum_{j=1}^{2} \hbar\omega\big[n_j + 1/2\big] = \hbar\omega\big[n_1 + n_2 + 1\big] \tag{36}$$

Wir hatten gezeigt, dass die Eigenenergien nach unten beschränkt sind

$$E \geq \hbar\omega \tag{37}$$

sodass es einen Zustand mit minimalem $n_1 \geq 0$ und $n_2 \geq 0$ geben muss. Dies impliziert, dass $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0$ liegen muss, weil wir dann durch mehrmaliges Anwenden des Vernichters

$$\hat{a}_1^{n_1+1}\,|n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1}a_1^{n_1}\,|n_1 - 1, n_2\rangle = \ldots = \sqrt{n_1!}a_1\,|0, n_2\rangle = \sqrt{n_1!} \cdot 0 = 0 \tag{38}$$

immer nur maximal bis zum Vakuumzustand $|n_1 = 0, n_2\rangle$ für $\hat{N}_1$ (natürlich genauso für $\hat{N}_2$) kommen und damit die Energie nach unten korrekt beschränkt bleibt.

(f) Die Energieeigenwerte des zweidimensionalen harmonischen Oszillators sind

$$E_{n_1,n_2} = \hbar\omega\big[n_1 + n_2 + 1\big] \tag{39}$$

Der Zustand mit der niedrigsten Energie

$$E_{0,0} = \hbar\omega \tag{40}$$

ist offensichtlich nicht entartet.
Es gibt zwei Zustände mit der zweitniedrigsten Energie

$$E_{1,0} = E_{0,1} = 2\hbar\omega \tag{41}$$

und bereits drei Zustände mit der drittniedrigsten Energie

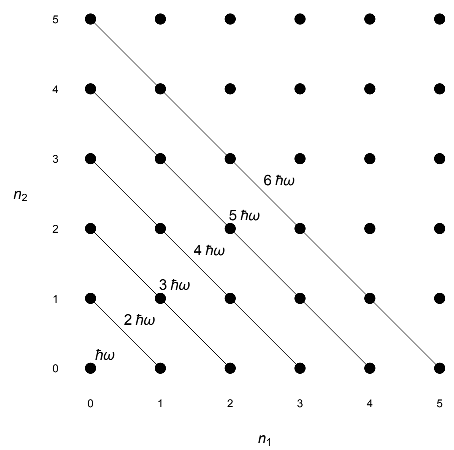
$$E_{2,0} = E_{1,1} = E_{0,2} = 3\hbar\omega \tag{42}$$

Die Energie

$$E = n \cdot \hbar\omega \tag{43}$$

ist demnach gerade n-fach entartet. Dies kann man am einfachsten graphisch sehen, wenn man auf der x-Achse n_1 und auf der y-Achse n_2 aufträgt. Offensichtlich muss im Vergleich von (39) mit (43) gerade $n = n_1 + n_2 + 1$ sein. Dies sind gerade die eingezeichneten Diagonalen im rechten Bild. Alternativ kann man die Entartung auch über die folgende Summe bestimmen:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \delta_{n,n_1+n_2+1} = \sum_{n_1=0}^{n-1} 1 = n \tag{44}$$



(g) Der d-dimensionale harmonische Oszillator wird beschrieben durch

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^{d} \left[\frac{\hat{p}_j^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}_j^2\right] = \sum_{j=1}^{d} \hbar\omega\big[\hat{N}_j + 1/2\big] \tag{45}$$

Die Eigenzustände sind wieder die gemeinsamen Eigenzustände der Besetzungszahloperatoren $\hat{N}_1, \ldots, \hat{N}_d$:

$$\hat{N}_j \left| n_1, \ldots, n_d \right\rangle = n_j \left| n_1, \ldots, n_d \right\rangle \tag{46}$$

mit den zugehörigen Eigenenergien

$$\hat{H} \left| n_1, \ldots, n_d \right\rangle = \sum_{j=1}^{d} \hbar\omega \big[\hat{N}_j + 1/2 \big] \left| n_1, \ldots, n_d \right\rangle = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \hbar\omega \big[n_j + 1/2 \big]}_{E_{n_1,\ldots,n_d}} \left| n_1, \ldots, n_d \right\rangle \tag{47}$$

Die Grundzustandsenergie des d-dimensionalen harmonischen Oszillators ist damit

$$E_{0,\ldots,0} = \sum_{j=1}^{d} \hbar\omega/2 = d \cdot \hbar\omega/2 \tag{48}$$