Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 6
Abgabe: 26.05.2015, Besprechung: 27.05.2015

---

1. Harmonischer Oszillator (8 Punkte, mündlich)

Wie gezeigt wurde, läßt sich der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators läßt sich durch Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ schreiben als

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega\left[\hat{a}^\dagger\hat{a} + \tfrac{1}{2}\right]. \tag{1}$$

Die Operatoren $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ sind dabei definiert als

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} + \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right] \qquad \text{und} \qquad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left[\hat{x} - \frac{i}{m\omega}\hat{p}\right]. \tag{2}$$

Die Eigenzustände $|n\rangle$ des Hamiltonoperators sind auch Eigenzustände des Operators $\hat{N} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ mit den Eigenwerten n:

$$\hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle\,. \tag{3}$$

(a) (2 Punkte) Berechnen Sie für den harmonischen Oszillator die folgenden Matrixelemente:

$$\begin{array}{cccc} \langle n|\hat{a}|m\rangle & \langle n|\hat{a}^\dagger|m\rangle & \langle n|\hat{x}|m\rangle & \langle n|\hat{p}|m\rangle \\ \langle n|\hat{x}^2|m\rangle & \langle n|\hat{p}^2|m\rangle & \langle n|\hat{p}\hat{x}|m\rangle & \langle n|\hat{x}\hat{p}|m\rangle \end{array}$$

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass im Falle des harmonischen Oszillators für Eigenzustände die Erwartungswerte für kinetische Energie[1] $\langle\hat{T}\rangle$ und potentielle Energie $\langle\hat{V}\rangle$ gleich sind.

(c) (3 Punkte) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(0)\rangle$ des Systems gegeben durch eine Superposition des Grundzustands $|0\rangle$ und des ersten angeregten Zustands $|1\rangle$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big). \tag{4}$$

Bestimmen Sie $|\psi(t)\rangle$ für beliebige Zeiten t.
Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\psi(t)|\,\hat{x}\,|\psi(t)\rangle$ und $\langle\psi(t)|\,\hat{p}\,|\psi(t)\rangle$

(d) (2 Punkte) Die Eigenzustände $\{|n\rangle\,; n = 0, 1, \dots\}$ bilden eine diskrete Basis. In dieser Basis können die Zustandsvektoren $|\psi\rangle$ als Spaltenvektor mit den Komponenten $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$ dargestellt werden. So lassen sich z.B. die Eigenzustände $|n\rangle$ darstellen als

$$|0\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \qquad |1\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\\vdots\end{pmatrix}, \qquad |2\rangle \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\\vdots\end{pmatrix} \qquad \text{usw.} \tag{5}$$

Operatoren können entsprechend als Matrix dargestellt werden.
Skizzieren[2] Sie die Matrixdarstellung der Operatoren $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$, $\hat{x}$ und $\hat{H}$ in dieser Basis.

---

[1] Der Operator $\hat{T}$ für die kinetische Energie darf nicht mit dem Translationsoperator zu $\hat{T}_\alpha$ verwechselt werden, siehe nächste Aufgabe.

[2] Die Basis ist abzählbar, aber unendlich. Damit können die Operatoren nicht vollständig dargestellt werden. Siehe auch die Zustandsvektoren (5).

2. Kohärente Zustände (12 Punkte, schriftlich)

Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist der Grundzustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit dem Hamiltonoperator (1) in Ortsdarstellung gegeben durch

$$\psi_0(x) = \langle x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \qquad \text{mit} \quad \xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\,, \tag{6}$$

Die Grundzustandswellenfunktion mit $\hat{a}\,|0\rangle = 0$ wird also durch eine Gaussfunktion mit $\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$ beschrieben (was sich zeitlich auch nicht ändert, da der Grundzustand ja ein stationärer Eigenzustand des Systems ist). Wir wollen nun den Zusammenhang mit den klassischen Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators herleiten.

(a) (2 Punkte) Wir lenken dazu zunächst das Teilchen im Grundzustand $|0\rangle$ aus seiner Ruhelage bei $x = 0$ um die Distanz $\alpha \in \mathbb{R}$ aus mit Hilfe des Translationsoperators $\hat{T}_\alpha = e^{-i\hat{p}\alpha/\hbar}$. Zeigen Sie zunächst, dass gilt

$$\hat{T}_\alpha = e^{-i\hat{p}\alpha/\hbar} = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \cdot e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}} \tag{7}$$

mit $\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\alpha$.

(b) (2 Punkte) Lassen Sie nun den Translationsoperator in (7) auf den Grundzustand $|0\rangle$ wirken. Zeigen Sie, dass man diesen neuen Zustand $|\alpha\rangle = \hat{T}_\alpha\,|0\rangle$ schreiben kann als

$$|\alpha\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\,|n\rangle \tag{8}$$

und bestimmen Sie die auftretenden Entwicklungskoeffizienten α_n.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie , dass die Wahrscheinlichkeit für den Zustand $|\alpha\rangle$ den Eigenzustand $|n\rangle$ zu messen einer Poissonverteilung entspricht.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der sogenannte *kohärente Zustand* $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ mit dem Eigenwert $\tilde{\alpha}$ ist

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \tilde{\alpha}\,|\alpha\rangle \tag{9}$$

Ist $|\alpha\rangle$ normiert?

(e) (2 Punkte) Bestimmen Sie für $|\alpha\rangle$ den Orts- und Impulserwartungswert $\langle\hat{x}\rangle\,, \langle\hat{p}\rangle$ sowie das Unschärfeprodukt $\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle\,\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle$. *Hinweis: Benutzen Sie Relation (9) sowie die komplex konjungierte Relation hiervon.*

(f) (2 Punkte) Aus der bekannten Zeitentwicklung $|n,t\rangle = e^{-iE_n t/\hbar}\,|n,t\rangle$ mit $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ ergibt sich aus (8) direkt die Zeitentwicklung von $|\alpha\rangle$. Zeigen Sie, dass der zeitabhängige kohärente Zustand $|\alpha, t\rangle$ durch

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega t/2}\,|\alpha(t)\rangle \qquad , \text{ mit } \alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t} \tag{10}$$

gegeben ist. Wenn ein Zustand zum Zeitpunkt $t = 0$ kohärent ist, bleibt er dann auch für $t > 0$ kohärent (ist also Eigenzustand zum Operator $\hat{a}$)?

(g) (2 Punkte) Bestimmen Sie nun die zeitabhängigen Erwartungswerte

$$\langle\hat{x}(t)\rangle = \langle\, \alpha, t\,|\,\hat{x}\,|\,\alpha, t\rangle \qquad \langle\hat{p}(t)\rangle = \langle\, \alpha, t\,|\,\hat{p}\,|\,\alpha, t\rangle \tag{11}$$

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis. Erfüllen $\langle\hat{x}(t)\rangle$ und $\langle\hat{p}(t)\rangle$ die klassischen Bewegungsgleichungen?

In der übernächsten Woche findet die **Übungsklausur** statt:

Mittwoch, den 03.06.2015, von 16:00 bis 18:00 Uhr.

Die Einteilung der Hörsäle erfolgt entsprechend des Anfangsbuchstaben des Nachnamen,

A-R: Gerthsen-Hörsaal
S-Z: Gaede-Hörsaal

Bringen Sie bitte Ihren Studentenausweis mit, eine vorherige Anmeldung ist nicht notwendig. Als **Hilfsmittel** ist **ein einseitig handschriftlich beschriebenes DIN A4 Blatt** erlaubt.