Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian

Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 6 (Lösungen)

Abgabe: 26.05.2015, Besprechung: 27.05.2015

1. Harmonischer Oszillator (8 Punkte, mündlich)

(a) (2 Punkte) Um die Matrixelemente in der Basis der Eigenzustände des harmonischen Oszillators zu berechnen stellt man alle Operatoren am besten durch die Auf- und Absteiger $\hat{a}^\dagger$ und $\hat{a}$ dar. So sind

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a} + \hat{a}^\dagger\right) \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a} - \hat{a}^\dagger\right). \tag{1}$$

Werden Auf- und Absteiger auf einen Zustand $|m\rangle$ angewendet, so gilt

$$\hat{a}^\dagger |m\rangle = \sqrt{m+1}\,|m+1\rangle\,, \qquad \hat{a}\,|m\rangle = \sqrt{m}\,|m-1\rangle\,. \tag{2}$$

Zur Berechnung der Matrixelemente muss man nun nur noch verwenden, dass die Eigenzustände $\{|n\rangle\,; n = 0,1,2,\dots\}$ ein Orthonormalsystem bilden, also gilt

$$\langle n|m\rangle = \delta_{n,m}. \tag{3}$$

Somit ergibt sich

$$\langle n|\hat{a}|m\rangle = \sqrt{m}\,\delta_{n,m-1} = \sqrt{n+1}\,\delta_{n+1,m} \tag{4}$$

$$\langle n|\hat{a}^\dagger|m\rangle = \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1} \tag{5}$$

$$\langle n|\hat{x}|m\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\langle n|\hat{a}|m\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger|m\rangle\Big) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big(\sqrt{m}\,\delta_{n+1,m} + \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\Big) \tag{6}$$

$$\langle n|\hat{p}|m\rangle = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\Big(\langle n|\hat{a}|m\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger|m\rangle\Big) = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\Big(\sqrt{m}\,\delta_{n+1,m} - \sqrt{m+1}\,\delta_{n,m+1}\Big) \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{x}^2|m\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\,\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^2|m\rangle \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\langle n|\hat{a}^2|m\rangle + \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|m\rangle + \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle\Big) \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\sqrt{m(m-1)}\delta_{n+2,m} + (m+1)\,\delta_{n,m} + m\,\delta_{n,m} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n,m+2} \\
&= \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n+2,m} + (2m+1)\,\delta_{n,m} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n,m+2}\Big)
\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
\langle n|\hat{p}^2|m\rangle &= -\frac{m\hbar\omega}{2}\,\langle n|(\hat{a} - \hat{a}^\dagger|m\rangle \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}\Big(\langle n|\hat{a}^2|m\rangle - \langle n|\hat{a}\hat{a}^\dagger|m\rangle - \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|m\rangle + \langle n|\hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle\Big) \\
&= -\frac{m\hbar\omega}{2}\Big(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n+2,m} - (2m+1)\,\delta_{n,m} + \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n,m+2}\Big)
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\langle n|\hat{x}\hat{p}|m\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\langle n|(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)|m\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\langle n|\hat{a}^2 \underbrace{-\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=-[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=-1} - \hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle$$

$$= -i\frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n+2,m} - \delta_{n,m} - \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n,m+2}\right) \tag{10}$$

$$\langle n|\hat{p}\hat{x}|m\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\langle n|(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)|m\rangle = -i\frac{\hbar}{2}\langle n|\hat{a}^2 \underbrace{+\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}}_{=[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1} - \hat{a}^{\dagger 2}|m\rangle$$

$$= -i\frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{m(m-1)}\,\delta_{n+2,m} + \delta_{n,m} - \sqrt{(m+1)(m+2)}\,\delta_{n,m+2}\right) \tag{11}$$

$$= \langle m|\hat{x}\hat{p}|n\rangle^* \tag{12}$$

(b) (1 Punkt) Die Erwartungswerte von $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ und $\hat{V} = \frac{m\omega\hat{x}^2}{2}$ für einen Eigenzustand $|n\rangle$ sind entsprechend Aufgabenteil a)

$$\langle n|\hat{T}|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1) \quad \text{und} \quad \langle n|\hat{T}|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}(2n+1) \tag{13}$$

und damit für alle Eigenzustände gleich.

(c) (3 Punkte) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der Zustand $|\psi(t)\rangle$ gegeben durch

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right) \tag{14}$$

wobei $|0\rangle$ der Grundzustand und $|1\rangle$ der erste angeregte Zustand ist.
Die Zustände $|0\rangle$ und $|1\rangle$ sind Eigenzustände des Hamilton-Operators $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ d.h. sie erfüllen die Eigenwertgleichung $\hat{H}\,|\psi_i\rangle = E_i\,|\psi_i\rangle$, explizit

$$\hat{H}\,|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\,|0\rangle \quad \text{und} \quad \hat{H}\,|1\rangle = \frac{3\hbar\omega}{2}\,|1\rangle\,. \tag{15}$$

Eigenzustände $|\psi_i\rangle$ haben entsprechend der Schrödingergleichung $i\hbar\partial_t\,|\psi_i\rangle = H\,|\psi_i\rangle = E_i\,|\psi_i\rangle$ die Zeitentwicklung $|\psi_i(t)\rangle = \exp(-iE_it/\hbar)\,|\psi_i(0)\rangle$. Das System ist zum Zeitpunkt $t = 0$ allerdings in der Superposition

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_0(0)\rangle + |\psi_1(0)\rangle\right) \tag{16}$$

mit $|\psi_0(0)\rangle = |0\rangle$ und $|\psi_1(0)\rangle = |1\rangle$ initialisiert. Die Superposition $|\psi(0)\rangle$ ist kein Eigenzustand, die Zeitentwicklung ist durch die Superposition der beiden zeitabhängigen Eigenzustände $|\psi_{0,1}(t)\rangle$ gegeben. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|\psi_0(t)\rangle + |\psi_1(t)\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-i\omega t/2}\,|0\rangle + e^{-i3\omega t/2}\,|1\rangle\Big) \end{aligned}. \tag{17}$$

Mit der zeitabhängigen Wellenfunktion lassen sich nun die gewünschten zeitabhängigen Erwartungswerte berechnen

$$\begin{aligned} \langle\psi(t)|\,\hat{a}^\dagger\,|\psi(t)\rangle &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|\,\hat{a}^\dagger\,|0\rangle + \langle 0|\,\hat{a}^\dagger\,|1\rangle\,e^{-i\omega t} + \langle 1|\,\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\,e^{i\omega t} + \langle 1|\,\hat{a}^\dagger\,|1\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\langle 0|\,\sqrt{1}\,|1\rangle + \langle 0|\,\sqrt{2}\,|2\rangle\,e^{-i\omega t} + \langle 1|\,\sqrt{1}\,|1\rangle\,e^{+i\omega t} + \langle 1|\,\sqrt{2}\,|2\rangle\Big) \\ &= \frac{1}{2}e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{18}$$

und

$$\langle\psi(t)|\,\hat{a}\,|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\,\hat{a}^\dagger\,|\psi(t)\rangle^* = \frac{1}{2}e^{-i\omega t} \tag{19}$$

damit

$$\langle\psi(t)|\,\hat{x}\,|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\psi(t)|\,\hat{a}+\hat{a}^\dagger\,|\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t) \tag{20}$$

analog

$$\langle\psi(t)|\,\hat{p}\,|\psi(t)\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,\langle\psi(t)|\,\hat{a}-\hat{a}^\dagger\,|\psi(t)\rangle = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\,\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2} = -\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\sin(\omega t) \tag{21}$$

(d) (2 Punkte) Die Matrixelemente einiger Operatoren zwischen Eigenzuständen $|n\rangle$ und $|m\rangle$ wurden schon in Aufgabenteil a) berechnet. In dieser Basis lassen sich die Operatoren damit direkt als Matrizen mit den Elementen $A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$ darstellen. Explizit sind die Auf- und Absteiger in dieser Darstellung

$$\hat{a}^\dagger \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{a} \mathrel{\hat{=}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}, \tag{22}$$

Orts- und Impulsoperator (letzterer der Vollständigkeit halber)

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right) \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und} \tag{23}$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right) \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i\sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ i\sqrt{1} & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & \\ 0 & i\sqrt{2} & 0 & -i\sqrt{3} & \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} & 0 & \ddots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \tag{24}$$

sind hermitische Operatoren, entsprechend sind auch die Matrizen hermitisch, d.h. es gilt $A_{ij} = A^*_{ji}$.
Der Hamiltonoperator

$$\hat{H} \mathrel{\hat{=}} \frac{\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 5 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 7 & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \tag{25}$$

ist nicht nur hermitisch, in der Basis der Eigenzustände ist er natürlich diagonal, mit den Eigenwerten als Diagonalelementen. Er läßt sich auch über das Matrixprodukt von $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ berechnen:

$$\langle n|\,\hat{N}\,|m\rangle = \langle n|\,\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|m\rangle = \langle n|\,\hat{a}^\dagger\left(\sum_{n'}|n'\rangle\,\langle n'|\right)\hat{a}\,|m\rangle \tag{26}$$

bedeutet für die Matrixelemente

$$N_{nm} = \sum_{n'} a_{nn'}a^\dagger_{n'm}. \tag{27}$$

2. Kohärente Zustände (12 Punkte, schriftlich)

(a) Wir drücken zunächst den Orts- und Impulsoperator durch die Auf- und Absteigeoperatoren aus

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right] \\ \hat{p} &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{i} \end{aligned} \tag{28}$$

Der Translationsoperator ist damit gerade

$$\hat{T}_\alpha = e^{-i\hat{p}\alpha/\hbar} = e^{-\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\alpha\left[\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right]} = e^{\tilde{\alpha}\left[\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right]} \tag{29}$$

mit $\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\alpha$. Wir nutzen nun die Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (siehe Blatt 3)

$$e^{\hat{X}+\hat{Y}} = e^{\hat{X}} e^{\hat{Y}} e^{-[\hat{X},\hat{Y}]/2} \qquad , \text{ für } [[\hat{X},\hat{Y}],\hat{X}] = [[\hat{X},\hat{Y}],\hat{Y}] = 0 \tag{30}$$

Da gilt $[[\hat{a},\hat{a}^\dagger],\hat{a}] = [[\hat{a},\hat{a}^\dagger],\hat{a}^\dagger] = 0$ können wir die BCH-Formel anwenden und bekommen

$$\begin{aligned}\hat{T}_\alpha &= e^{\tilde{\alpha}\left[\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right]} = e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}} e^{-\left[\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger,-\tilde{\alpha}\hat{a}\right]/2} = e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}} e^{\tilde{\alpha}^2\left[\hat{a}^\dagger,\hat{a}\right]/2} = e^{-\tilde{\alpha}^2/2} e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}} \\ &= e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}}\end{aligned} \tag{31}$$

wobei wir verwendet haben dass $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Wir wirken nun mit $\hat{T}_\alpha$ auf den Grundzustand $|0\rangle$ und nutzen $\hat{a}|0\rangle = 0$

$$\begin{aligned}\hat{T}_\alpha |0\rangle &= e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}} |0\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} e^{-\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger}\left(1 - \tilde{\alpha}\hat{a} + \ldots\right)|0\rangle \\ &= e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} e^{\tilde{\alpha}\hat{a}^\dagger}|0\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle\end{aligned} \tag{32}$$

Nun gilt

$$(\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = (\hat{a}^\dagger)^{n-1}\hat{a}^\dagger |0\rangle = (\hat{a}^\dagger)^{n-1}\sqrt{1}\,|1\rangle = (\hat{a}^\dagger)^{n-2}\sqrt{1\cdot 2}\,|2\rangle = \ldots\sqrt{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n}\,|n\rangle = \sqrt{n!}\,|n\rangle \tag{33}$$

sodass

$$\hat{T}_\alpha |0\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{n!}\sqrt{n!}\,|n\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}}}_{\alpha_n} |n\rangle \tag{34}$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen im Zustand $|\alpha\rangle$ den Eigenzustand $|n\rangle$ (und damit die Energie $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$ zu messen), ist gegeben durch

$$P_{|\alpha\rangle}(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \left| e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{n,m}} \right|^2 = \left| e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}} \right|^2 = e^{-|\tilde{\alpha}^2|} \frac{|\tilde{\alpha}|^{2n}}{n!} \tag{35}$$

Dies ist offensichtlich eine Poissonverteilung mit der Varianz $\sigma = |\tilde{\alpha}|^2$.

(d) Berechne die Wirkung von $\hat{a}$ auf $|\alpha\rangle$

$$\begin{aligned}\hat{a}|\alpha\rangle &= e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}} \underbrace{\hat{a}|n\rangle}_{\sqrt{n}|n-1\rangle} = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{(n-1)!}} |n-1\rangle \\ &= e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^{n+1}}{\sqrt{n!}} |n\rangle = \tilde{\alpha}\, e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \tilde{\alpha}\,|\alpha\rangle\end{aligned} \tag{36}$$

Damit ist $|\alpha\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{a}$ mit dem Eigenwert $\tilde{\alpha}$. Der Zustand $|\alpha\rangle$ ist zudem normiert, da

$$\begin{aligned}\|\,|\alpha\rangle\,\|^2 &= \langle\alpha|\alpha\rangle = \left(e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}} \langle n|\right)\left(e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle\right) \\ &= e^{-|\tilde{\alpha}|^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}^m\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{m!n!}} \underbrace{\langle n|m\rangle}_{\delta_{n,m}} = e^{-|\tilde{\alpha}|^2} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(|\tilde{\alpha}|^2)^n}{n!}}_{=e^{|\tilde{\alpha}|^2}} = 1\end{aligned} \tag{37}$$

(e) Wir betrachten zunächst (36) und sein komplex konjungiertes

$$\begin{aligned} \hat{a}\,|\alpha\rangle &= \tilde{\alpha}\,|\alpha\rangle \\ \langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger &= \tilde{\alpha}\,\langle\alpha| \end{aligned} \tag{38}$$

Hiermit können wir nun berechnen

$$\begin{aligned} \langle\,\hat{x}\,\rangle = \langle\,\alpha\mid\hat{x}\mid\alpha\rangle &\overset{(28)}{=} \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\,\alpha\mid\hat{a}+\hat{a}^\dagger\mid\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\Big[\langle\alpha|\underbrace{\hat{a}\,|\alpha\rangle}_{\tilde{\alpha}|\alpha\rangle} + \underbrace{\langle\alpha|\,\hat{a}^\dagger}_{\tilde{\alpha}\langle\alpha|}|\alpha\rangle\Big] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}2\tilde{\alpha}\,\langle\alpha|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\tilde{\alpha} = \alpha \end{aligned} \tag{39}$$

$$\langle\,\hat{p}\,\rangle = \langle\,\alpha\mid\hat{p}\mid\alpha\rangle \overset{(28)}{=} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{\langle\,\alpha\mid\hat{a}-\hat{a}^\dagger\mid\alpha\rangle}{i} = 0 \tag{40}$$

Wir haben also wirklich unseren Zustand um α im Ort verschoben. Wir bestimmen zudem

$$\begin{aligned} \langle\,\hat{x}\,\rangle^2 &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\,\alpha\mid(\hat{a}+\hat{a}^\dagger)^2\mid\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\,\alpha\mid\hat{a}^2+(\hat{a}^\dagger)^2+\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\mid\alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\,\alpha\mid\hat{a}^2+(\hat{a}^\dagger)^2+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\mid\alpha\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\big[\tilde{\alpha}^2+\tilde{\alpha}^2+2\tilde{\alpha}^2+1\big] \\ &= \alpha^2 + \frac{\hbar}{2m\omega} \end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned} \langle\,\hat{p}\,\rangle^2 &= -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle\,\alpha\mid(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)^2\mid\alpha\rangle = -\frac{\hbar m\omega}{2}\langle\,\alpha\mid\hat{a}^2+(\hat{a}^\dagger)^2-\hat{a}^\dagger\hat{a}-\hat{a}\hat{a}^\dagger\mid\alpha\rangle \\ &= \frac{\hbar m\omega}{2}\langle\,\alpha\mid-\hat{a}^2-(\hat{a}^\dagger)^2+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\mid\alpha\rangle = \frac{\hbar m\omega}{2}\Big[-\tilde{\alpha}^2-\tilde{\alpha}^2+2\tilde{\alpha}^2+1\Big] = \frac{\hbar m\omega}{2} \end{aligned} \tag{42}$$

sodass $\langle\,(\Delta\hat{x})^2\,\rangle = \langle\,\hat{x}^2\,\rangle - \langle\,\hat{x}\,\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$ und $\langle\,(\Delta\hat{p})^2\,\rangle = \langle\,\hat{p}^2\,\rangle - \langle\,\hat{p}\,\rangle^2 = \frac{\hbar m\omega}{2}$ gilt sowie das Unschärfeprodukt

$$\langle\,(\Delta\hat{x})^2\,\rangle\langle\,(\Delta\hat{p})^2\,\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \tag{43}$$

Die Unschärfe ist also minimal für einen kohärenten Zustand (weil es im Ortsraum gerade eine um $x = \alpha$ zentrierte Gaussfunktion ist).

(f) Die Zeitentwicklung des Eigenzustand $|n\rangle$ des Hamiltonoperators kann bestimmt werden über die zeitabhängige Schrödingergleichung

$$i\hbar\partial_t\,|n,t\rangle = \hat{H}\,|n,t\rangle \qquad \to \qquad E_n\,|n\rangle = \hat{H}\,|n\rangle \quad \checkmark \tag{44}$$

mit dem Separationsansatz $|n,t\rangle = e^{-iE_nt/\hbar}\,|n\rangle = e^{-i\omega t(n+1/2)}\,|n\rangle$. Damit folgt also für die zeitliche Entwicklung des kohärenten Zustand $|\alpha\rangle$, dass

$$\begin{aligned} |\alpha,t\rangle &\overset{(34)}{=} e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}}\,|n,t\rangle = e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tilde{\alpha}^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega t(n+1/2)}\,|n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2}e^{-|\tilde{\alpha}|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\tilde{\alpha}e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = e^{-i\omega t/2}\,|\alpha e^{-i\omega t}\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2}\,|\alpha(t)\rangle \end{aligned} \tag{45}$$

mit $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$.

Wir wenden nun noch $\hat{a}$ auf den Zustand $|\alpha,t\rangle$ an und finden sofort

$$\hat{a}\,|\alpha,t\rangle = e^{-i\omega t/2}\hat{a}\,|\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}\tilde{\alpha}(t)\,|\alpha(t)\rangle = \tilde{\alpha}(t)\,|\alpha,t\rangle \tag{46}$$

wobei $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}e^{-i\omega t}$. Ein kohärenter Zustand bleibt also zu jedem Zeitpunkt t ein Eigenzustand zu $\hat{a}$ und damit kohärent.

(g) Betrachte zunächst Gleichung (46) und die komplex konjugierte Gleichung

$$\begin{aligned} \hat{a}\,|\alpha,t\rangle &= \tilde{\alpha}(t)\,|\alpha,t\rangle \\ \langle\alpha,t|\,\hat{a}^\dagger &= \tilde{\alpha}^*(t)\,\langle\alpha,t| \end{aligned} \tag{47}$$

Wir bestimmen nun

$$\begin{aligned} \langle\,\hat{x}(t)\,\rangle = \langle\,\alpha,t\mid\hat{x}\mid\alpha,t\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle\,\alpha,t\mid\hat{a}+\hat{a}^\dagger\mid\alpha,t\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\big[\tilde{\alpha}(t)+\tilde{\alpha}^*(t)\big] \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\tilde{\alpha}\big[e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}\big] = \alpha\cos(\omega t) \end{aligned} \tag{48}$$

und

$$\begin{aligned} \langle\,\hat{p}(t)\,\rangle = \langle\,\alpha,t\mid\hat{p}\mid\alpha,t\rangle &\overset{(28)}{=} \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{\langle\,\alpha,t\mid\hat{a}-\hat{a}^\dagger\mid\alpha,t\rangle}{i} = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\frac{\tilde{\alpha}(t)-\tilde{\alpha}^*(t)}{i} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\tilde{\alpha}\frac{e^{-i\omega t}-e^{i\omega t}}{i} = -m\omega\alpha\sin(\omega t) = m\partial_t\langle\,\hat{x}(t)\,\rangle \end{aligned} \tag{49}$$

Offensichtlich erfüllen die kohärenten Zustände die klassischen Bewegungsgleichungen des harmonischen Oszillators.

$$\begin{aligned} \ddot{x}+\omega^2 x &= 0 \\ p &= m\dot{x} \end{aligned} \tag{50}$$