Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theorie der Kondensierten Materie

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

Prof. Dr. Jörg Schmalian
Dr. Andreas Poenicke, Patrik Hlobil

Blatt 7
Abgabe: 09.06.2015, Besprechung: 10.06.2015

---

1. (7 Punkte, mündlich) Eindimensionale δ-Barriere

Betrachten Sie ein eindimensionales System mit einem Potential

$$V(x) = V_0\,\delta(x) \tag{1}$$

wobei $\delta(x)$ die Dirac-Deltafunktion ist.

Diese ist definiert über die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a) \tag{2}$$

für jede beliebig oft differenzierbare Funktion $f(x)$. Damit gilt insbesondere $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\mathrm{d}x = 1$.

(a) (3 Punkte) Leiten Sie die Anschlußbedingungen für ψ und $\partial_x\psi$ bei $x = 0$ her. Hinweis: Integrieren Sie dazu die stationäre Schrödingergleichung über ein Intervall $(-\epsilon, +\epsilon)$ und betrachten Sie den Limes $\epsilon \to 0$.

(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten T sowie den Reflexionskoeffizienten R dieses Potentials für eine einfallende ebene Welle mit der Wellenfunktion

$$\psi_{\mathrm{in}}(x) = Ae^{ikx}. \tag{3}$$

Ist $R + T = 1$ weiterhin gültig?

(c) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Energieabhängigkeit des Transmissionskoeffizienten.

2. (7 Punkte, schriftlich) Doppelstufen-Potential

Betrachten Sie das Doppelstufen-Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_1 & 0 \le x < a \\ V_2 & a \le x \end{cases}. \tag{4}$$

wobei $V_2 \ge V_1 \ge 0$. Dabei sollen im Folgenden nur einfallende Teilchen mit Energie $E \ge V_2$ betrachtet werden!

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie den Transmissionskoeffizienten T für die Doppelstufe.

(b) (3 Punkte) In der Vorlesung wurde die Transmission an einer einzelnen Potentialstufe behandelt.
T_1 bezeichne nun den Transmissionskoeffizienten für eine Potentialstufe der Höhe V_1, T_2 den Transmissionskoeffizienten für eine Stufe der Höhe V_2. Zeigen Sie das gilt

$$T_2 \le T_1 \qquad \text{und} \qquad T \ge T_2. \tag{5}$$

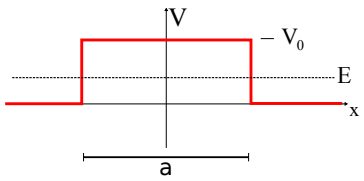
Geben Sie ein physikalische Begründung für diese Ungleichungen.

(c) (1 Punkt) Gilt in diesem Fall die Relation $T = T_1 T_2$?

3. (6 Punkte, schriftlich) Gamov-Faktor

Die quantenmechanische Tunnelwahrscheinlichkeit durch eine Barriere wie rechts dargestellt, kann beschrieben werden durch

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} \sinh^2(Ka)} \tag{6}$$



mit $K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass sich die Tunnelwahrscheinlichkeit im Limes $Ka \gg 1$ schreiben lässt als

$$T = \exp\big[-2Ka + \log[\mathcal{O}(1)]\big] \tag{7}$$

(b) (2 Punkte) Betrachten Sie nun den Fall einer allgemeinen Tunnelbarriere $V(x)$ wie in Abbildung 1 zu sehen. Die klassischen Umkehrpunkte seien x_a und x_b . Approximieren Sie das Potential durch N Rechteckpotentiale der Breite $\Delta x = \frac{x_b - x_a}{N}$ und drücken Sie die Tunnelwahrscheinlichkeit durch ein Produkt von Tunnelwahrscheinlichkeiten der Form (7) aus.

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass im Kontinuumslimit $\Delta x_i \to 0$ und unter Vernachlässigung des log-Terms in (7) die Tunnelwahrscheinlichkeit für ein Teilchen der Energie E durch $V(x)$ geschrieben werden kann als

$$T_G = e^{-2G} \tag{8}$$

mit dem **Gamov-Faktor** $G = \int_{x_a}^{x_b} dx \sqrt{2m\big[V(x) - E\big]}/\hbar$.

(d) (2 Punkte) Der radioaktive α-Zerfall soll durch das Tunneln von α-Teilchen mit Bahndrehimpuls $l = 0$ durch die Potentialbarriere

$$V(x) = \frac{Z(Z_K - Z)e^2}{r}\theta(r - R_0) \tag{9}$$

beschrieben werden (wegen der s-Wellennäherung $l = 0$ können wir das Problem als effektiv eindimensional behandeln). Das α-Teilchen habe eine Energie von $Z(Z_K - Z)e^2/R_0 \gg E > 0$, die Ladungszahl $Z = 2$ und Z_K sei die Kernladungszahl des Atoms. Finde den Ausdruck für den Gamov-Faktor des α-Zerfalls (das auftretende Integral muss **nicht** berechnet werden).

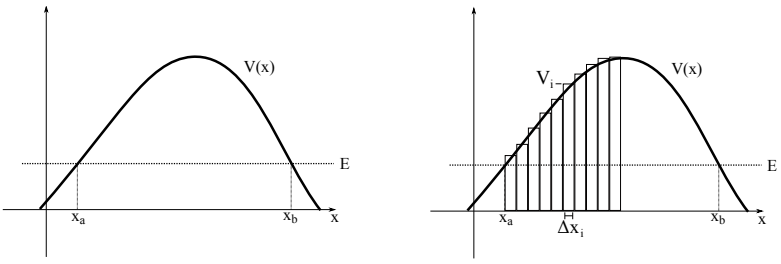


Abbildung 1: Skizze einer allgemeinen Potentialbarriere $V(x)$ mit klassischen Umkehrpunkten x_a und x_b und Approximation durch Rechteckpotentiale.