KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE — INSTITUT FÜR THEORIE DER KONDENSIERTEN MATERIE

Übungen zur Modernen Theoretischen Physik I SS 15

PROF. DR. JÖRG SCHMALIAN
DR. ANDREAS POENICKE, PATRIK HLOBIL

Blatt 7 (Lösungen)
Abgabe: 09.06.2015, Besprechung: 10.06.2015

---

1. (7 Punkte, mündlich) Eindimensionale δ-Barriere

(a) (3 Punkte) Zuerst leiten wir die Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion und deren Ableitung her. Dafür integrieren wir die Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x). \tag{1}$$

über das Intervall $(-\epsilon, +\epsilon)$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x + \int_{-\epsilon}^{\epsilon}V(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\epsilon}^{\epsilon}E\psi(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Der erste Term ergibt

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\hbar^2}{2m}\big(\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\big), \tag{3}$$

der Term auf der rechten Seite verschwindet für endliches $\psi(x)$

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}E\psi(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0^+}2\epsilon E\psi(0) = 0. \tag{4}$$

Der Term mit dem Potential hingegen ergibt

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\epsilon}^{\varepsilon}V(x)\psi(x)\mathrm{d}x = V_0\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\delta(x)\psi(x)\mathrm{d}x = V_0\psi(0). \tag{5}$$

Wir erhalten somit als Stetigkeitsbedingung für die Ableitung

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\psi'(\varepsilon) - \lim_{\epsilon\to 0^+}\psi'(-\epsilon) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0). \tag{6}$$

Weiterhin muss die Stetigkeit der Wellenfunktion gegeben sein,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\psi(+\epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0}\psi(-\epsilon).$$

(b) (3 Punkte) Betrachten wir nun die Lösungen der Schrödingergleichung für die Bereiche $x > 0$ und $x < 0$

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ikx} & x > 0. \end{cases} \tag{7}$$

Die Stetigkeit der Wellenfunktion bei $x = 0$ fordert

$$A + B = C \tag{8}$$

die Ableitung der Wellenfunktion hat hingegen eine Sprung und führt zu

$$ikC = ik(A - B) + \frac{2mV_0}{\hbar^2}C. \tag{9}$$

Die Lösung dieser Gleichungen (zur Vereinfachung nehmen wir $A = 1$ an) ist

$$C = \frac{k}{k + i\frac{mV_0}{\hbar^2}} = \frac{k\left(k - i\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)}{k^2 + \frac{mV_0}{\hbar^2}} \tag{10}$$

Der Transmissionskoeffizient ist damit

$$T = |C|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2} = \frac{E}{E + \frac{mV_0^2}{2\hbar^2}}. \tag{11}$$

Das Problem hat also offensichtlich eine charakteristische Energie

$$E_0 = \frac{1}{2}\frac{mV_0^2}{\hbar^2} \tag{12}$$

Aus

$$R = |B|^2 = |C-1|^2 = \left|\frac{i\frac{mV_0}{\hbar^2}}{k + i\frac{mV_0}{\hbar^2}}\right|^2 = \frac{\left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2}{k^2 + \left(\frac{mV_0}{\hbar^2}\right)^2} \tag{13}$$

folgt $R + T = 1$.

(c) (1 Punkte)

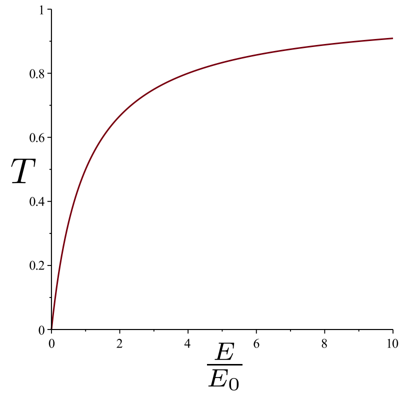


Abbildung 1: Transmissionskoeffizient als Funktion der Energie

2. (7 Punkte, schriftlich)

(a) (3 Punkte) Die Wellenfunktion in den einzelnen Teilbereichen ist gegeben durch

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ Ce^{ik_1x} + De^{-ik_1x} & 0 \le x < a \\ Fe^{ik_2x} & a \le x. \end{cases} \tag{14}$$

mit

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{und} \quad k_{1,2} = \sqrt{\frac{2m\,(E - V_{1,2})}{\hbar^2}} \tag{15}$$

womit $k \ge k_1 \ge k_2$.

Wenden wir nun die Stetigkeitsbedingungen für die Wellenfunktion und ihre erste Ableitung bei $x = 0$ and $x = a$ an, können wir den Transmissionskoeffizient

$$T = \frac{k_2}{k}\left|\frac{F}{A}\right|^2 \tag{16}$$

berechnen.

Die Stetigkeitsbedingungen geben die vier Gleichungen

$$A + B = C + D \qquad A - B = \frac{k_1}{k}(C - D) \tag{17}$$

$$Ce^{ik_1a} - D^{-ik_1a} = Fe^{ik_2a} \qquad 2De^{-ik_1a} = \frac{k_2}{k_1}Fe^{ia_2a}. \tag{18}$$

Analog zur Vorlesung lösen wir (18) nach C und D auf

$$C = \frac{F}{2} e^{ik_2 a} \big(1 + \frac{k_2}{k_1}\big) e^{-ik_1 a} \tag{19}$$

$$D = \frac{F}{2} e^{ik_2 a} \big(1 - \frac{k_2}{k_1}\big) a^{+ik_1 a}, \tag{20}$$

subtrahieren die beiden Gleichungen (17) und setzen C und D ein

$$2A = \big(1 + \frac{k_1}{k}\big) C + \big(1 - \frac{k_1}{k}\big) D \tag{21}$$

$$= \frac{F}{kk_1} e^{ik_2 a} \big[k_1 (k + k_2) \cos(k_1 a) - i(k_1^2 + kk_2) \sin(k_1 a)\big]. \tag{22}$$

Damit erhalten für den Transmissionskoeffizienten

$$T = \frac{k_2}{k} \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{4kk_1^2 k_2}{k_1^2 (k + k_2)^2 + (k_2^2 - k_1^2)(k^2 - k_1^2) \sin^2(k_1 a)}. \tag{23}$$

Setzen wir $k1 = k2$ erhalten wir das bekannte Ergebnis für eine einzelne Stufe.

(b) (3 Punkte) In der Vorlesung wurde der Transmissionskoeffizient T_i für eine einzelne Stufe hergeleitet

$$T_i = \frac{4k_i k}{(k + k_i)^2} \tag{24}$$

Die Ungleichung $T_2 \leq T_1$ folgt damit direkt aus $k \geq k_1 \geq k_2$. Das Ergebnis ist physikalisch einleuchtend, ein höheres Potential führt bei fester Energie des Teilchens zu kleinerer Transmission.

Die zweite Ungleichung ist subtiler. Man erhält sie indem man schreibt

$$T = \frac{4kk_1^2 k_2}{k_1^2 (k + k_2)^2 - \Delta^2} \tag{25}$$

und bemerkt, dass gilt

$$\Delta^2 = (k_1^2 - k_2^2)(k^2 - k_1^2) \sin^2(k_1 a) \geq 0. \tag{26}$$

Damit erhält man

$$T = \frac{4kk_1^2 k_2}{k_1^2 (k + k_2)^2 - \Delta^2} \geq \frac{4kk_1^2 k_2}{k_1^2 (k + k_2)^2} = T_2. \tag{27}$$

Ursprünglich hat man vielleicht erwartet, dass das Hinzufügen einer kleinen Stufe vor der Höheren den Transmissionskoeffizient senken würde. Es ist jedoch das Gegenteil der Fall. Für einfallende Wellen ist es sehr ungünstig auf eine starke Steigung des Potentials zu treffen. Eine geringere Steigung, verteilt auf zwei Stufen erhöht den Transmissionskoeffizienten.

(c) (1 Punkte) Gilt in diesem Fall die Relation $T = T_1 T_2$?

Nein, offensichtlich gilt dies nicht. Es gibt einen Interferenz-Term in T (der $\sin^2(k_1 a)$-Term) der zu stehenden Wellen in der ersten Stufe des Potentials führt. Dieser Effekt existiert nicht im Fall zweier einzelnen Stufen.

3. (6 Punkte, schriftlich) Gamov-Faktor

(a) Im Limes $Ka \gg 1$ nähern wir einmal $\sinh(Ka)^2 = \left(\frac{e^{Ka}-e^{-Ka}}{2}\right)^2 \approx e^{2Ka}/4$. Zudem ist dann wegen $V_0 > E$

$$\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)} > \frac{E^2}{4E(V_0-E)} = \frac{E}{4(V_0-E)} > \frac{E}{4V_0} > \frac{1}{4} \tag{28}$$

sodass $\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh(Ka)^2 \approx \frac{V_0^2}{16E(V_0-E)}e^{2Ka} \gg 1$. Damit folgt

$$T = \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(Ka)} \approx \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{16E(V_0-E)}e^{2Ka}} \approx \frac{1}{\frac{V_0^2}{4E(V_0-E)}\sinh^2(Ka)} \approx \frac{1}{1+\frac{V_0^2}{16E(V_0-E)}e^{2Ka}}$$
$$= \frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}e^{-2Ka} = \exp\left(-2Ka + \ln\left[\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2}\right]\right) \tag{29}$$

Der Term im Logarithmus kann wegen $V_0 > E$ abgeschätzt werden zu

$$\frac{16E(V_0-E)}{V_0^2} < \frac{16EV_0}{V_0^2} = \frac{16E}{V_0} < 16 \tag{30}$$

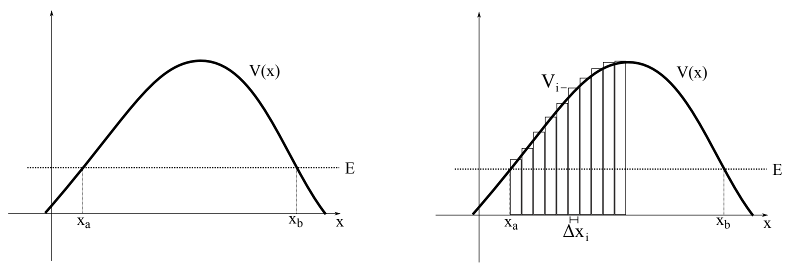
und ist damit nur eine Zahl von Ordnung 1, welcher im Logarithmus sehr klein wird (außer an den klassischen Umkehrpunkten $E = V_0$ bei denen jedoch unsere Approximation nicht anwendbar war, da hier $K = 0$).

(b) Wie in der Abbildung unten zu sehen, approximieren wir das Potential $V(x)$ durch N Rechtecke mit der Breite $\Delta x = \frac{x_b - x_a}{N}$ und entsprechender Höhe $V_i = V(x_i)$. Die Tunnelwahrscheinlichkeit durch das Rechteck bei $x_i = x_a + i \cdot \Delta x$ wird nach (29) beschrieben durch

$$T_i = \exp\left(-2K_i\Delta x + \ln\left[\frac{16E(V_i-E)}{V_i^2}\right]\right) \tag{31}$$

wobei $K_i = \sqrt{\frac{2m(V_i-E)}{\hbar^2}}$. Die Gesamttunnelwahrscheinlichkeit durch das gesamte Potential ist dann gegeben als das Produkt aller Tunnelwahrscheinlichkeiten durch die einzelnen Rechtecke

$$T = \prod_{i=1}^{N} T_i \tag{32}$$



(c) Unter Vernachlässigung des log-Terms und im Kontinuumslimit $N \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) gilt

$$T = \prod_{i=1}^{N} T_i \approx \prod_{i=1}^{N} \exp(-2K_i\Delta x) = \exp(-2\sum_{i=1}^{N} K_i\Delta x) = \exp\left[-2\sum_{i=1}^{N}\sqrt{\frac{2m(V_i-E)}{\hbar^2}}\Delta x\right]$$
$$\xrightarrow{\Delta x \to 0} \exp\left[-2\int_{x_a}^{x_b}\sqrt{\frac{2m(V(x)-E)}{\hbar^2}}dx\right] \tag{33}$$

(d) Um den Gamov-Faktor zu berechnen, müssen wir zunächst die klassischen Umkehrpunkte $E = V(r)$ des Potentials bestimmen. Wie in der unteren Abbildung zu sehen, gilt natürlich, dass der linke Umkehrpunkt einfach durch R_0 gegeben ist und der rechte Umkehrpunkt durch

$$E = \frac{Z(Z_K - Z)e^2}{r_1} \qquad \rightarrow \qquad r_1 = \frac{Z(Z_K - Z)e^2}{E} \tag{34}$$

Der Gamov-Faktor ist dann einfach

$$G = \frac{1}{\hbar} \int_{R_0}^{r_1} dr \sqrt{2m\Big[\frac{Z(Z_K - Z)e^2}{x} - E\Big]} \tag{35}$$